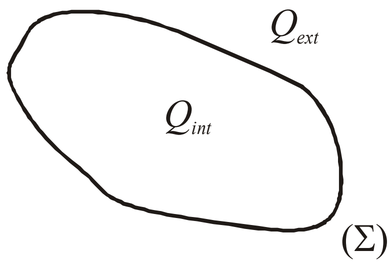
THÉORÈME DE GAUSS

I. THÉORÈME DE GAUSS

Le théorème de Gauss exprime le lien entre les sources et le champ. Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée (Σ), délimitant un volume τ, est égal à la charge Q_{int} contenue à l'intérieur de cette surface divisée par ε_0.



Théorème de Gauss : Soit *S* une surface fermée. $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

II. THÉORÈME DE GAUSS POUR LA GRAVITATION

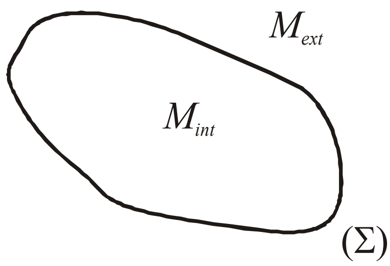
On a vu que les résultats pour le champ électrostatique peuvent être généralisés au champ gravitationnel en utilisant l'analogie suivante :

charge $\to$ masse

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G$$

$$\vec{E} \to \vec{A}$$

On en déduit donc le théorème de Gauss pour la gravitation :
Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée (Σ), délimitant un volume τ, est relié à la masse M_{int} contenue à l'intérieur de cette surface.



Théorème de Gauss pour la gravitation : Soit *S* une surface fermée.

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

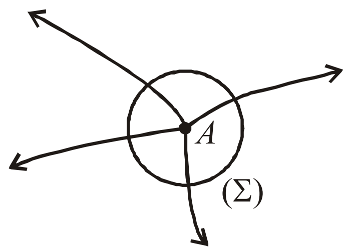
III. PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DANS UNE RÉGION VIDE DE CHARGES

Dans une région vide de charges, le théorème de Gauss s'écrit pour une surface fermée S : $\oint\!\!\oint_{S} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$.

Dans une **<u>région vide de charges</u>** :

- Le champ électrostatique est à flux conservatif.
- Pour toute surface fermée (Σ), le flux sortant du champ électrostatique est nul : $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext} = 0$
- Le flux de $\vec{E}$ est le même à travers toute section d'un même tube de champ.
- Le potentiel V ne peut pas avoir d'extremum (théorème de l'extremum). On ne peut donc pas piéger une particule soumise uniquement à un champ électrostatique puisqu'on ne peut pas avoir d'équilibre stable (l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle est $E_p = qV$).

Démonstration par l'absurde :
Dans une région vide de charges, supposons que le potentiel soit maximum en un point A de l'espace.
Soit (Σ) une surface au voisinage de A.



Les lignes de champ sont dirigées dans le sens des potentiels décroissants.
Le flux sortant de S est donc positif car les lignes de champ divergent à partir de A
Or $Q_{int} = 0$. D'après le théorème de Gauss, il est impossible d'avoir $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext} > 0$ et $Q_{int} = 0$.

IV. MÉTHODES DE CALCUL DU CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE POUR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

IV.1 Méthodes de calcul

a) Calcul du champ puis on en déduit le potentiel

- Calcul direct : prévoir la direction du champ avec les plans de symétrie ou d'antisymétrie. Ecrire la **loi de Coulomb**: $\boxed{\mathrm{d}\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 KM^2}\vec{u}_{K\to M} = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{KM}}{KM^3}}$, projeter et intégrer.
- Utiliser l'équation de **Maxwell-Gauss** $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (voir cours de deuxième année)
- Utiliser le théorème de Gauss. Cette méthode donne des résultats simples pour des distributions hautement symétriques. Elle se fait en 3 étapes : **recherche des plans de symétrie ou d'antisymétrie, recherche des invariances et application du théorème de Gauss** (la surface de Gauss est par exemple un cylindre de hauteur *h*, une sphère, un parallélépipède…).

On en déduit directement le potentiel en intégrant la relation $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

b) Calcul du potentiel puis on en déduit le champ

- Calcul à partir du potentiel donné par la **loi de Coulomb** : $\boxed{\mathrm{d}V = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 KM}}$ avec $\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}\tau$ ou $\sigma\mathrm{d}S$ ou $\lambda\mathrm{d}l$. Intégrer pour en déduire le potentiel *V*.

ATTENTION : Cette méthode n'est pas valable s'il y a des charges à l'infini.

On en déduit le champ à partir de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

- **Équation de Poisson** : $\boxed{\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$. L'intégrer et en déduire le champ. (voir cours de deuxième année).

IV.2 Propriétés admises

- Pour une distribution volumique, *V* et $\vec{E}$ sont définis et continus en tout point de l'espace.
- Pour une distribution surfacique, $\vec{E}$ est discontinu à la traversée de la surface de distribution. $\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}}$.

Le potentiel *V* est continu en tout point de l'espace pour une distribution surfacique.

- Pour une distribution linéïque, *V* et $\vec{E}$ ne sont pas définis sur la distribution.

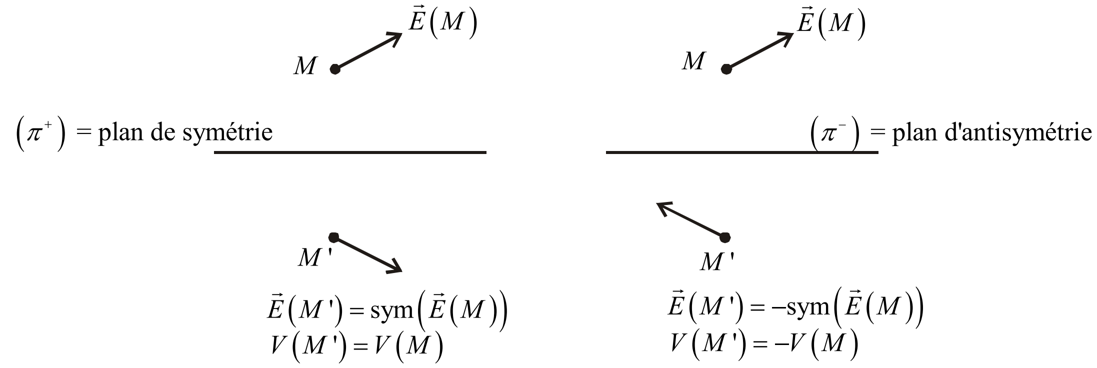
Il ne faut pas oublier que les distributions surfaciques et linéïques sont des modélisations et donc une approximation Il ne faut pas être surpris d'avoir des résultats qui divergent.

IV.3 Choix de la constante pour le potentiel

Pour une **distribution finie**, on doit **choisir** $V(\infty) = 0$

Par contre, pour une distribution infinie, on ne peut pas choisir $V(\infty) = 0$. Lire l'énoncé qui impose arbitrairement un potentiel de référence.

V. PLAN DE SYMÉTRIE ET PLAN D'ANTISYMÉTRIE



VI. EXEMPLES

VI.1 Champ créé par un segment uniformément chargé

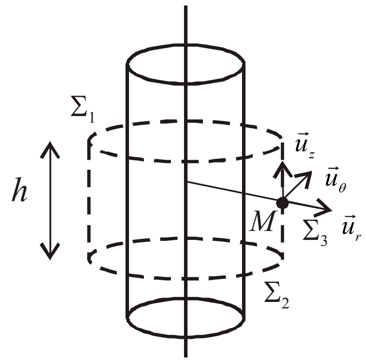
Voir chapitre sur le Champ électrostatique.

VI.2 Disque de surface *S*

Voir chapitre sur le Champ électrostatique.

VI.3 Cylindre illimité uniformément chargé en surface *S*

On considère un cylindre illimité de rayon R uniformément chargé en surface. On appelle σ la densité surfacique de charges.



a) Calcul du champ électrostatique

- Les plans $P=\left(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta\right)$ et $Q=\left(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z\right)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}\left(M\right)\in\left(P\cap Q\right)$, soit $\vec{E}$ // $\vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz, donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z. Bilan : $\boxed{\vec{E}=E\left(r\right)\vec{u}_r}$.
- Théorème de Gauss appliqué à surface fermée $\left(\Sigma\right)$: cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r. $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}=\iint_{\Sigma_1}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}+\iint_{\Sigma_2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}+\iint_{\Sigma_3}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint_{\Sigma_3}E\left(r\right)\vec{u}_r\cdot\mathrm{d}S\vec{u}_r=E\left(r\right)2\pi rh$.

  Les trois surfaces formant $\left(\Sigma\right)$ sont : $\left(\Sigma_1\right)$ surface supérieure, $\left(\Sigma_2\right)$ surface inférieure et $\left(\Sigma_3\right)$ surface latérale.

  Attention : on ne peut pas prendre comme surface de Gauss un cylindre infini !

  Il y a deux cas :
  - Si $r>R$: $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S$, donc $Q_{\text{int}}=\sigma 2\pi Rh=\lambda h$.

    La charge intérieure peut s'exprimer en fonction de σ mais aussi en fonction de λ la densité linéïque de charge équivalente. On a donc : $\vec{E}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$
  - Si $r<R$: $Q_{\text{int}}=0$, donc $\vec{E}=\vec{0}$.

  Le champ n'est pas défini sur le cylindre à cause de la modélisation surfacique. Pour connaître le champ dans la surface, il faudrait changer d'approximation et considérer une approximation volumique.

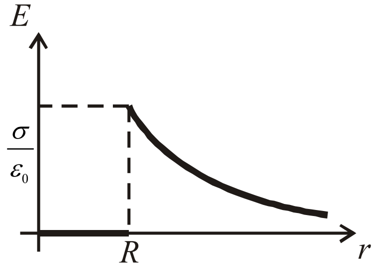
b) Calcul du potentiel électrostatique

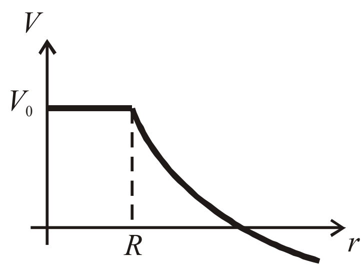
La distribution est infinie. **On ne peut donc pas choisir** : $V\left(\infty\right)=0$. Il faut bien lire l'énoncé qui indique où choisir la constante. Prenons $V\left(R\right)=V_0$.

$\mathrm{d}V=-\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}=-E\left(r\right)\vec{u}_r\cdot\left(\mathrm{d}r\vec{u}_r+r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta+\mathrm{d}z\vec{u}_z\right)=-E\left(r\right)\mathrm{d}r$

La distribution est surfacique : le potentiel est continu en tout point de l'espace.

- Si $r\le R$, $\vec{E}=\vec{0}$, donc $\mathrm{d}V=0$ et $V=\text{cte}=V_0$.
- Si $r\ge R$, $\mathrm{d}V=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$. On intègre entre R et r : $V-V_0=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$





c) Interprétation physique

- Si $r>R$, le champ est le même que celui créé par un fil illimité.
- **Les résultats sont valables si on est loin des bords.**

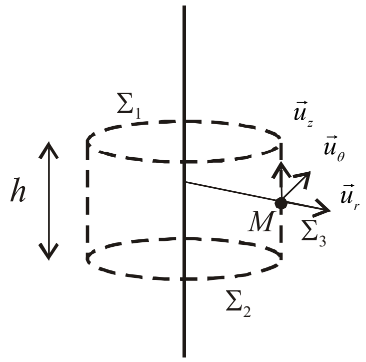
- De part et d'autre de la distribution, $r = R^+$ et $r = R^-$, on a une discontinuité du champ électrostatique.

On vérifie que : $\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}}$.

- On a un modèle limite. Il ne faut donc pas être surpris d'avoir un potentiel qui tend vers l'infini quand r tend l'infini. Le modèle du cylindre infini n'est donc plus pertinent.
- **Le champ diverge à partir des charges positives**. Il est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

VI.4 Fil illimité uniformément chargé

On considère un fil illimité de densité linéïque λ uniforme.



a) Calcul du champ électrostatique

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} \mathbin{//} \vec{u}_r$.
- La distribution D de charge est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz, donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z. Bilan : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.
- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma_3} E(r)\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\vec{u}_r = E(r)2\pi rh$.

Les trois surfaces formant (Σ) sont : (Σ_1) surface supérieure, (Σ_2) surface inférieure et (Σ_3) surface latérale.

Attention : on ne peut pas prendre comme surface de Gauss un cylindre infini !

Le point M est nécessairement à l'extérieur du fil : $Q_{\text{int}} = \lambda h$.

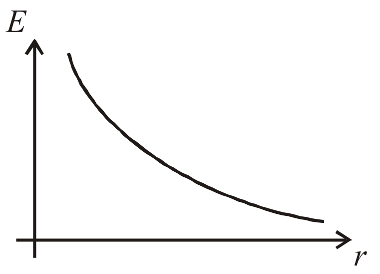
On a donc : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

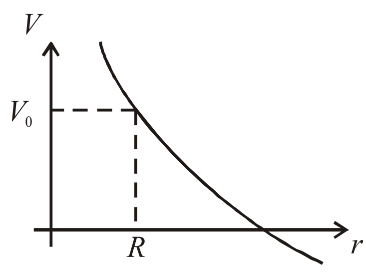
b) Calcul du potentiel électrostatique

La distribution est infinie. **On ne peut donc pas choisir** : $V(\infty) = 0$. Il faut bien lire l'énoncé qui indique où choisir la constante. Prenons $V(R) = V_0$.

$\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -E(r)\vec{u}_r \cdot (\mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z) = -E(r)\mathrm{d}r$

$\mathrm{d}V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$. On intègre entre R et r : $V - V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}$.





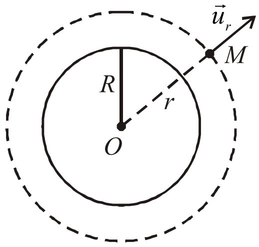
c) Interprétation physique

- dès qu'on rentre dans le fil, l'approximation linéïque n'est plus valable. Il faut considérer une approximation surfacique ou volumique.
- **Les résultats sont valables si on est loin des bords**.

- On a un modèle limite. Il ne faut donc pas être surpris d'avoir un potentiel qui tend vers l'infini quand r tend l'infini. Le modèle du fil infini n'est donc plus valable.
- Le champ diverge à partir des charges positives. Il est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

VI.5 Sphère uniformément chargée en volume

On considère une sphère de rayon R uniformément chargé en volume. On appelle ρ la densité volumique de charges. Soit Q la charge totale de la sphère.



a) Calcul du champ électrostatique

- Les plans $P=\left(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta\right)$ et $Q=\left(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi\right)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}\left(M\right)\in\left(P\cap Q\right)$, soit $\vec{E}\ //\ \vec{u}_r$.
- La distribution D de charge est invariante par rotations d'angle θ et φ, donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et φ. Bilan : $\boxed{\vec{E}=E\left(r\right)\vec{u}_r}$.
- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée $\left(\Sigma\right)$: sphère passant par M et de rayon r.

$$\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}=\oiint_{\Sigma}E\left(r\right)\vec{u}_r\cdot\mathrm{d}S\vec{u}_r=E\left(r\right)4\pi r^2.$$

Il y a deux cas :

- Si $r\geq R$: $\mathrm{d}q=\rho\,\mathrm{d}\tau$, donc $Q_{\text{int}}=\rho\frac{4}{3}\pi R^3=Q$.

  On a donc : $\vec{E}=\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

- Si $r\leq R$: $Q_{\text{int}}=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$, donc $\vec{E}=\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$.

b) Calcul du potentiel électrostatique

La distribution est finie. **Il faut donc choisir** : $V\left(\infty\right)=0$.

$$\mathrm{d}V=-\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}=-E\left(r\right)\vec{u}_r\cdot\left(\mathrm{d}r\vec{u}_r+r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta+r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_z\right)=-E\left(r\right)\mathrm{d}r$$

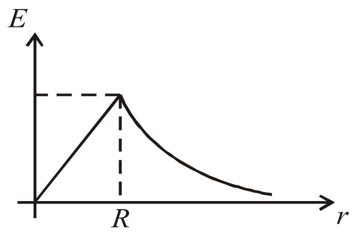
La distribution est volumique : le potentiel est continu en tout point de l'espace.

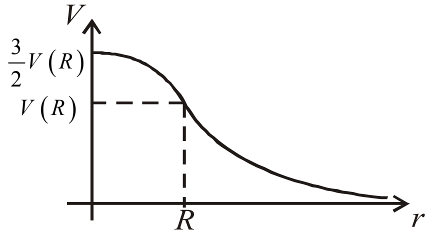
- Si $r\geq R$, $\vec{E}=\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, donc $\mathrm{d}V=-\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$. On intègre entre ∞ et r :

  $V\left(M\right)-V\left(\infty\right)=\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}-0=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}-0$. Pour $r=R$, on a : $V\left(R\right)=\dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$.

- Si $r\leq R$, $\mathrm{d}V=-\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r$. On intègre entre R et r : $V\left(r\right)-V\left(R\right)=-\left(\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}-\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\right)$.

$$V\left(0\right)=V\left(R\right)-\left(-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\right)=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\frac{3}{2}.$$





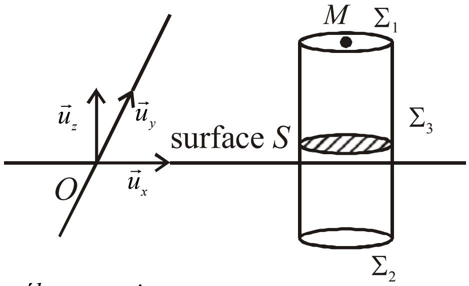
c) Interprétation physique

- Si $r \geq R$, le champ est le même que celui créé par une charge ponctuelle.
- On peut faire une analogie avec la gravitation. Si on suppose la terre à symétrie sphérique, tout se passe comme si le champ de gravitation créé par la terre était créé par une masse ponctuelle dès qu'on est à l'extérieur de la terre.

- Le potentiel et le champ sont continus en tout point de l'espace. C'est normal car on a une distribution volumique.
- Le champ diverge à partir des charges positives. Il est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.
- Les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre *O*. Les lignes de champ sont des droites qui divergent à partir de *O* si $Q > 0$. Les lignes de champ sont des droites qui convergent vers *O* si $Q < 0$.

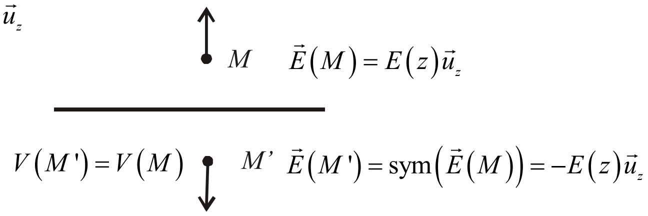
VI.6 Plan uniformément chargé

On considère un plan infini $z = 0$ uniformément chargé en surface. On appelle σ la densité surfacique de charges.



a) Calcul du champ électrostatique

- Les plans $P = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} \mathbin{//} \vec{u}_z$.
- La distribution *D* de charge est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de *x* et *y*. Bilan : $\boxed{\vec{E} = E(z)\vec{u}_z}$.
- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie. Le champ en *M'* symétrique de *M* par rapport au plan $z = 0$ est : $\vec{E}(M') = \text{sym}\left(\vec{E}(M)\right) = -E(z)\vec{u}_z$



- Théorème de Gauss appliqué à une surface fermée (Σ) : cylindre passant par *M*.

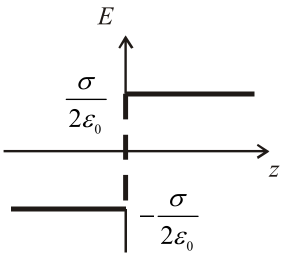
On suppose $z > 0$:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{ext} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{1ext} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{2ext} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}_{3ext} = \iint_{\Sigma_1} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} \left(-E(z)\right)\vec{u}_z \cdot (-dS)\vec{u}_z = 2E(z)S$$

Le charge intérieure vaut $Q_{\text{int}} = \sigma S$, d'où $\boxed{z > 0 : \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$

On en déduit immédiatement le champ dans la région $\boxed{z < 0 : \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$

Remarque : Il est indispensable de fermer la surface de Gauss par S_2. On ne peut pas fermer par S_3 car le champ n'est pas défini pour z = 0.

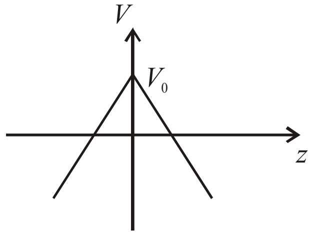


b) Calcul du potentiel électrostatique

La distribution est infinie. On ne peut pas choisir : $V(\infty)=0$. On choisit par exemple $V(z=0)=V_0$.

La distribution est surfacique : le potentiel est continu en tout point de l'espace.

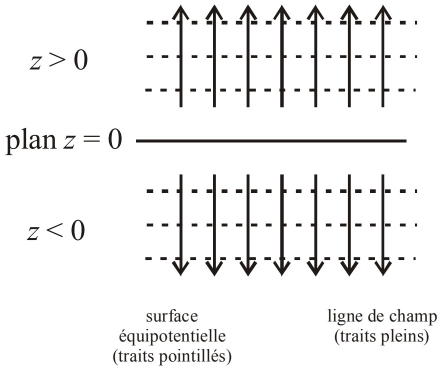
$$\mathrm{d}V=-\vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l}=-E(z)\vec{u}_z\cdot\left(\mathrm{d}x\vec{u}_x+\mathrm{d}y\vec{u}_y+\mathrm{d}z\vec{u}_z\right)=-E(z)\mathrm{d}z$$



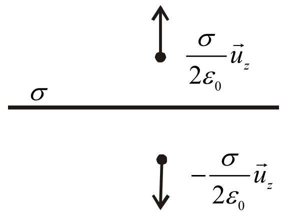
- Dans la région $z > 0$: $\mathrm{d}V=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}z$. On intègre entre 0 et z : $V-V_0=-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$
- Dans la région $z > 0$: $\mathrm{d}V=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}z$. On intègre entre 0 et z : $V-V_0=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z$

c) Interprétation physique

- On peut être surpris d'avoir un champ constant dans la région $z > 0$. C'est un modèle fort qui est valable si on est **loin des bords**.
- Le champ diverge à partir des charges positives. Il est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.



- De part et d'autre de la distribution, $z=0^+$ et $z=0^-$, on a une discontinuité du champ électrostatique. On vérifie que : $\boxed{\vec{E}_2-\vec{E}_1=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2}}$.
- On a une fonction impaire pour E_z et une fonction paire pour V : c'est normal puisque le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.
- Il est bon de connaître par cœur le champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.

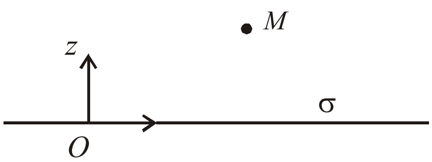


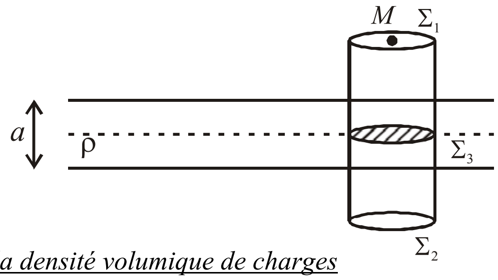
On a une discontinuité égale à $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Le signe + et – peut se retrouver facilement sachant que le champ diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

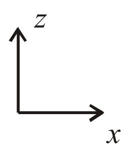
VI.7 On « rentre dans le plan infini ». Calcul du champ et du potentiel

On veut étudier le champ dans « le plan infini ». Il faut changer d'approximation. On considère une distribution volumique de charges situées entre les plans $z = -a/2$ et $z = a/2$.

On choisit arbitrairement $V(0) = 0$.







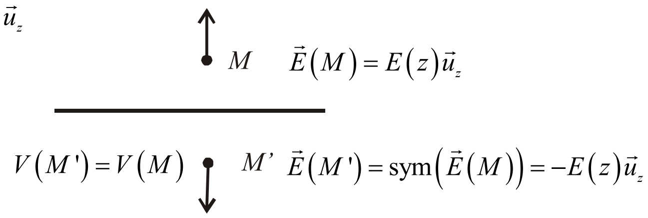
a) Relation entre la densité surfacique et la densité volumique de charges

Pour faire le lien avec l'exercice précédent, on cherche une relation entre la densité surfacique de charges du plan infini et la densité volumique de charges de la distribution volumique.

La méthode est de calculer la charge dq de deux manières : $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\rho a\mathrm{d}S$, d'où $\boxed{\sigma=\rho a}$.

b) Propriétés du champ et du potentiel

- Les plans $P=(M,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ et $Q=(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M)\in(P\cap Q)$, soit $\vec{E}\,//\,\vec{u}_z$.
- La distribution D de charge est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, donc $\vec{E}$ et V aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de x et y. Bilan : $\boxed{\vec{E}=E(z)\vec{u}_z}$ et $\boxed{V=V(z)}$
- Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie. Le champ en M' symétrique de M par rapport au plan $z = 0$ est : $\vec{E}(M')=\text{sym}\left(\vec{E}(M)\right)=-E(z)\vec{u}_z$



- Considérons un point M appartenant au plan $z = 0$.
  Les plans $(M,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$, $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ et $(M,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection, donc $\boxed{\vec{E}=0 \text{ pour } z=0}$.

c) Méthode 1 : Théorème de Gauss

On suppose $z\geq 0$: La surface de Gauss est un cylindre passant par M.

$$\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}=\iint_{\Sigma_1}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{1ext}+\iint_{\Sigma_2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{2ext}+\iint_{\Sigma_3}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{3ext}=\iint_{\Sigma_1}E(z)\vec{u}_z\cdot\mathrm{d}S\vec{u}_z+\iint_{\Sigma_2}\left(-E(z)\right)\vec{u}_z\cdot(-\mathrm{d}S)\vec{u}_z$$

On a donc : $\oiint_{S}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext}=2E(z)S$

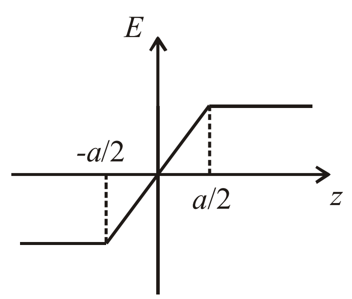
- Si $z\geq a/2$, $Q_{\text{int}}=\rho aS$, on a donc $\boxed{E=\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}}$
- Si $0\leq z\leq a/2$, $Q_{\text{int}}=\rho 2zS$, on a donc $\boxed{E=\dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}}$

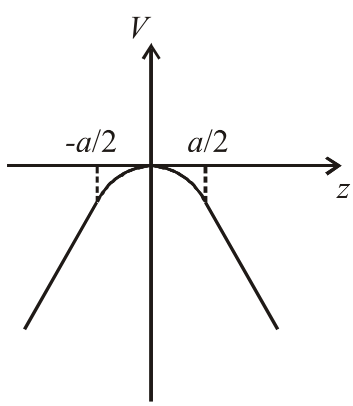
On en déduit le champ dans la région $z < 0$ par symétrie :

- Si $z\leq -a/2$: $\boxed{E=-\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}}$
- Si $-a/2\leq z\leq 0$: $\boxed{E=-\dfrac{\rho|z|}{\varepsilon_0}=\dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}}$

En dehors du volume chargé, on retrouve les résultats du plan infini puisque $\sigma=\rho a$.

$$\boxed{\text{Si } z\geq a/2, \text{ on a } E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{et si } z\leq -a/2 : E=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$





La distribution est infinie. On ne peut pas choisir : $V(\infty)=0$. On choisit par exemple $V(0)=0$.

La distribution est volumique : le potentiel est continu en tout point de l'espace.

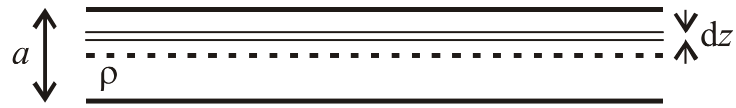
$\mathrm{d}V=-\vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l}=-E(z)\vec{u}_z\cdot\left(\mathrm{d}x\vec{u}_x+\mathrm{d}y\vec{u}_y+\mathrm{d}z\vec{u}_z\right)=-E(z)\mathrm{d}z$

- Si $-\,a/2 \le z \le a/2$: $\mathrm{d}V = -\dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}\mathrm{d}z$. On intègre entre 0 et z : $V = -\dfrac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$ puisque $V(0) = 0$. Le potentiel vaut en $a/2$: $V\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$
- Si $z \ge a/2$: $\mathrm{d}V = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}z$. On intègre entre $a/2$ et z : $\mathrm{d}V = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}z$
- Dans la région $z \ge a/2$: $\mathrm{d}V = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}z$. On intègre entre 0 et z : $V - \left(-\dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}\right) = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\left(z - \dfrac{a}{2}\right)$.

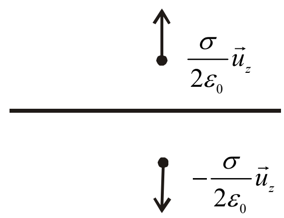
  Soit $V = -\dfrac{\rho a z}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.
- Dans la région $z \le -\,a/2$: La fonction est paire, donc $V = -\dfrac{\rho a|z|}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} = \dfrac{\rho a z}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$.

d) Méthode 2: Théorème de superposition

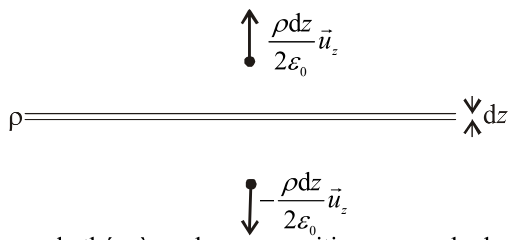
- On utilise le théorème de superposition. La distribution volumique D comprise entre les plans $z = -\,a/2$ et $z = a/2$ est la même que la superposition de plaques de même densité volumique et d'épaisseur dz.



- Il faut connaître par cœur le champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.



  En calculant la charge par deux méthodes, on a $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = \rho \mathrm{d}z\mathrm{d}S$, soit $\sigma = \rho \mathrm{d}z$. On en déduit le champ créé par la distribution volumique de charges d'épaisseur dz.



- Il reste à appliquer le théorème de superposition pour calculer le champ créé par D.
  - Si $z \ge a/2$, tous les plans sont au dessous du point M. On a donc : $E = \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\rho \mathrm{d}z}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
  - Si $z \le -\,a/2$, tous les plans sont au dessus du point M. On a donc : $E = \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -\frac{\rho \mathrm{d}z}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
  - Si $-\,a/2 \le z \le a/2$, les plans situés entre $-a/2$ et z sont au dessous du point M alors que les plans situés entre z et $a/2$ sont en dessus du point M. On en déduit :

    $E = \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{z} \frac{\rho \mathrm{d}z}{2\varepsilon_0} + \int_{a}^{\frac{a}{2}} -\frac{\rho \mathrm{d}z}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.