

# RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS

## I. FORCES D'INERTIE

### I.1 Introduction des forces d'inertie et PFD dans un référentiel non galiléen

- Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$ .
- Soient deux référentiels :  $\mathfrak{R}_0 = (E_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  : référentiel galiléen et  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel non galiléen.
- Bilan des forces :  $\vec{f} =$  résultante des forces qui s'appliquent sur  $M$
- On applique la PFD dans le référentiel galiléen  $\mathfrak{R}_0$  :  $m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_0} = \vec{f}$

La loi de composition des accélérations s'écrit :  $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_0} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$

On obtient :  $m(\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)) = \vec{f}$ , d'où  $m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{f} - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M)$

On définit :

**Force d'inertie d'entraînement**  $= \vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M)$

**Force d'inertie de Coriolis**  $= \vec{f}_{ic}(M) = -m\vec{a}_c(M)$

On peut donc écrire le PFD dans le référentiel non galiléen  $\mathfrak{R}$  :  $m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{f} + \vec{f}_{ie}(M) + \vec{f}_{ic}(M)$

**Pour appliquer le PFD dans un référentiel non galiléen, il suffit de rajouter l'effet des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.**

**Toutes les vitesses, les accélérations, les travaux, les puissances seront calculés dans  $\mathfrak{R}$ .**

Par la suite, on notera  $\vec{v}$  la vitesse dans  $\mathfrak{R}$  et  $\vec{a}$  l'accélération dans  $\mathfrak{R}$ .

On n'aura pas besoin de la vitesse dans  $\mathfrak{R}_0$  et de l'accélération dans  $\mathfrak{R}_0$ .

On aura juste besoin de  $\mathfrak{R}_0$  pour calculer  $\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M)$  et  $\vec{f}_{ic}(M) = -m\vec{a}_c(M)$ .

L'ensemble des résultats de la mécanique newtonienne peut donc être utilisé dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter les effets des forces d'inertie.

*Vocabulaire :  $\vec{f}$  traduit des interactions, on dit que ce sont des forces « véritables » alors que  $\vec{f}_{ie}$  et  $\vec{f}_{ic}$  ne sont pas des « forces véritables » car elles n'existent que dans les référentiels non galiléens. On dit que ce sont des « pseudo-forces ». Cependant, on verra leurs effets dans ces référentiels et il est donc préférable d'éviter de dire que  $\vec{f}_{ie}$  et  $\vec{f}_{ic}$  sont des forces fictives.*

### I.2 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

D'après le paragraphe précédent, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique dans  $\mathfrak{R}$  non galiléen à condition de rajouter le travail des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

$$dE_c = \delta W_{\vec{f}} + \delta W_{\vec{f}_{ie}} + \delta W_{\vec{f}_{ic}}$$

**La puissance de la force de Coriolis est nécessairement calculée dans  $\mathfrak{R}$  :**

$$P = \vec{f}_{ic}(M) \cdot \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = (-2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}}) \cdot \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}}$$

$\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}}$  est bien la vitesse relative puisque le référentiel absolu est  $\mathfrak{R}_0$ .

On travaille uniquement dans le référentiel relatif. La vitesse relative  $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}}$  est notée  $\vec{v}$ .

On a alors  $P = \vec{f}_{ic}(M) \cdot \vec{v} = (-2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$  car  $\vec{f}_{ic}(M) \perp \vec{v}$ .

**La puissance de la force de Coriolis est nulle, donc le travail de la force de Coriolis est nul.**

**La force de Coriolis ne modifie donc pas le module de la vitesse mais dévie le vecteur vitesse.**

### I.3 Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen.

D'après le paragraphe précédent, on peut appliquer le théorème du moment cinétique dans  $\mathfrak{R}$  non galiléen à condition de rajouter le moment des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Pour un point  $O$  fixe dans  $\mathfrak{R}$ , on a :  $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_0(\vec{f}) + \vec{\Gamma}_0(\vec{f}_{ie}) + \vec{\Gamma}_0(\vec{f}_{ic})$

## II. DEUX CAS PARTICULIERS IMPORTANTS

### II.1 Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel

- Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$
  - Soient deux référentiels :  $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel galiléen et  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel non galiléen.
- $\mathfrak{R}$  est en translation par rapport à  $\mathfrak{R}_0$ , donc  $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} = \vec{0}$ . On en déduit que  $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$  et  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O)_{\mathfrak{R}_0}$ .

**Si  $\mathfrak{R}_0 = (E_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est en translation par rapport à  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , alors :**

$$\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}(O)_{\mathfrak{R}_0}$$

$$\vec{f}_{ic}(M) = \vec{0}$$

**Si  $\mathfrak{R}_0 = (E_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , alors :  $\vec{f}_{ie}(M) = \vec{0}$  et  $\vec{f}_{ic}(M) = \vec{0}$ . On retrouve bien le principe de relativité galiléenne.**

### II.2 Référentiel en rotation uniforme autour d'un autre référentiel

On considère  $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$  un référentiel en rotation uniforme par rapport à  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  autour de l'axe fixe  $(O, \vec{k})$ .

[http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/entrainement\\_rot.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Cinematique/entrainement_rot.html)

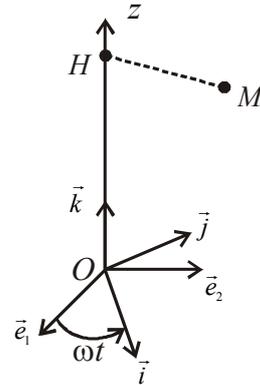
Exemple :  $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$  référentiel géocentrique et  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel terrestre.

On note  $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} = \omega \vec{k}$  avec  $\omega = cte$ .

a) Il y a une seule façon de calculer l'accélération de Coriolis :  $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}$ .  
On a vu que l'on note  $\vec{v}$  la vitesse relative puisqu'on travaille exclusivement dans le référentiel relatif  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

b) Accélération d'entraînement : Le point coïncidant décrit un cercle de centre  $H$ , de rayon  $HM$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $Oz$ . Le point coïncidant est un point collé au référentiel terrestre.

**Le mouvement du point coïncidant est circulaire uniforme donc  $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overline{HM}$  et  $\vec{f}_{ie}(M) = +m\omega^2 \overline{HM}$**

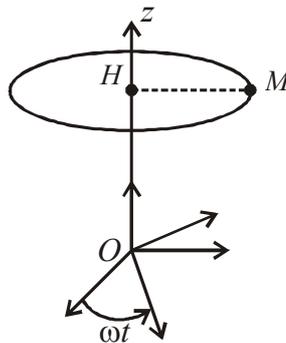


**$\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à  $\mathfrak{R}_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ .**

$$\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{f}_{ie}(M) = +m\omega^2 \overline{HM} : \text{FORCE CENTRIFUGE}$$

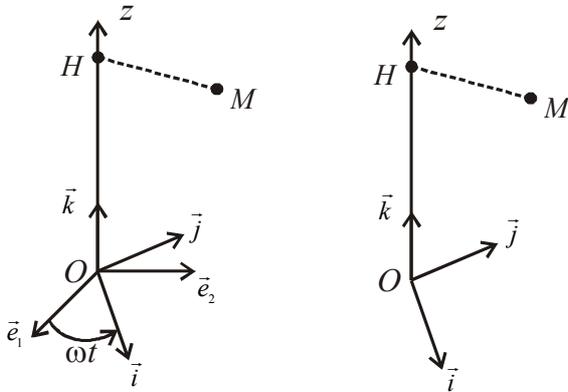
**Interprétation physique :** pour un mouvement circulaire, l'accélération est centripète dirigée vers le centre de rotation. La force d'inertie d'entraînement est appelée force centrifuge et dirigée de  $H$  vers  $M$  : elle fuit le centre de rotation  $H$ .



*Remarque importante : On peut prendre n'importe quel point fixe par rapport à la terre comme origine du référentiel terrestre. De même, on peut choisir n'importe quelle base orthonormée directe pour le référentiel terrestre à condition que les vecteurs soient fixes par rapport à la Terre.*

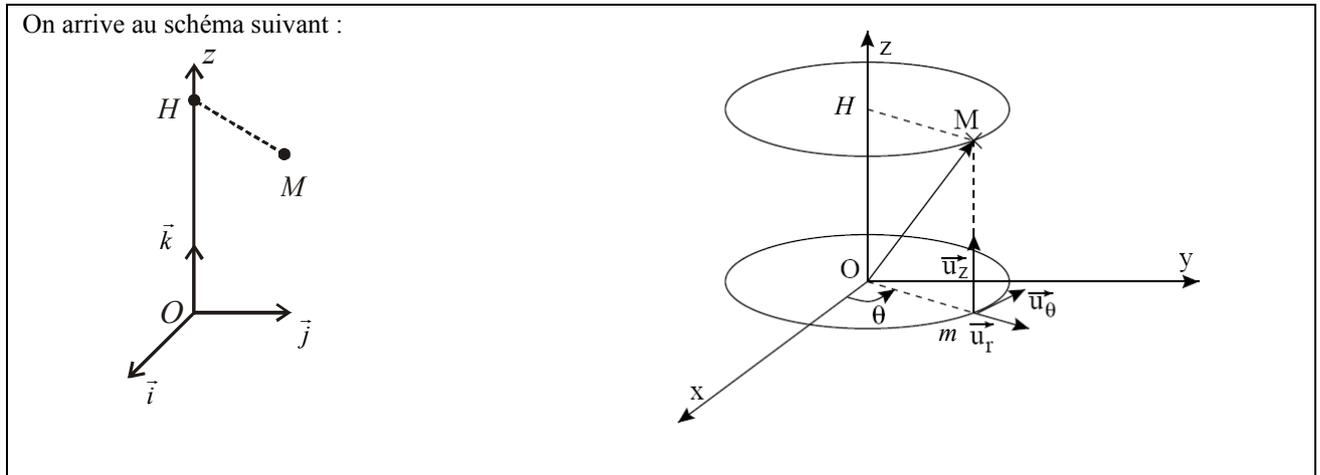
Par la suite, on ne s'intéressera qu'au mouvement relatif de  $M$  par rapport à la Terre.

Sur le schéma, on ne représentera que le référentiel  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On utilisera deux bases de projection : coordonnées cartésiennes ou coordonnées cylindriques.



Sur le deuxième schéma, on a représenté uniquement  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les autres vecteurs unitaires sont inutiles.

On arrive au schéma suivant :



Calculons l'énergie potentielle de la force centrifuge.

La méthode est de calculer le travail élémentaire :

$$\delta W = \vec{f}_{ic} \cdot d\vec{l}.$$

1<sup>ère</sup> possibilité : On utilise la base des coordonnées cylindriques :  $\vec{f}_{ic}(M) = +m\omega^2 \overline{HM} = m\omega^2 r \vec{u}_r$ , et

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$\delta W = m\omega^2 r dr = -dE_p$$

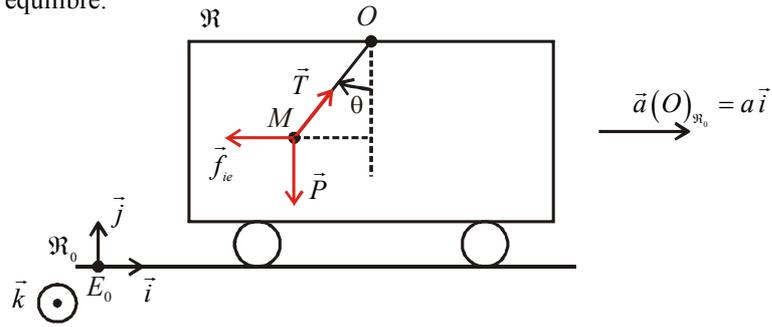
2<sup>ème</sup> possibilité :  $\delta W = \vec{f}_{ic} \cdot d\overline{OM} = m\omega^2 \overline{HM} \cdot (d\overline{OH} + d\overline{HM}) = m\omega^2 \overline{HM} \cdot (dz \vec{u}_z + d\overline{HM}) = 0 + m\omega^2 \overline{HM} \cdot d\overline{HM}$

$$\delta W = m\omega^2 d\left(\frac{HM^2}{2}\right) = -dE_p, \text{ d'où}$$

**L'énergie potentielle de la force centrifuge vaut :  $E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 + cte$**

### III. EXERCICE

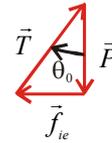
On considère un pendule simple de longueur  $l$  accroché au plafond d'un camion animé d'un mouvement de translation et **uniformément accéléré**. Déterminer la position d'équilibre de la masse  $m$  dans le camion et la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.



- Système = {Point matériel  $M$  de masse  $m$ }
- Référentiels :  $\mathcal{R}_0 = (E_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel terrestre galiléen et  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel lié au camion.
- Bilan des forces :
  - Poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$
  - Tension du fil :  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$
  - $\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M) = -m\vec{a}(O)_{\mathcal{R}_0} = -ma\vec{i}$
  - $\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  car  $\mathcal{R}$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .
- PFD dans  $\mathcal{R}$  :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \cancel{\vec{f}_{ic}}$

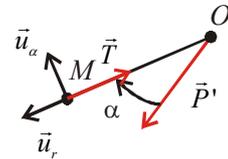
À l'équilibre de la masse  $m$  par rapport au camion :  $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie}$

On en déduit  $\tan \theta_0 = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$



On obtient ainsi l'inclinaison par rapport à la verticale de la direction d'équilibre du fil.

- PFD dans  $\mathcal{R}$  :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \cancel{\vec{f}_{ic}}$
- On fait un changement de variable :  $\theta = \theta_0 + \alpha$
- On pose  $\vec{P}' = \vec{P} + \vec{f}_{ie} = m\vec{g}' =$  poids apparent.
- Le PFD s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{P}' + \vec{T}$



On projette sur la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\alpha)$  :

$$\begin{cases} m(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2) = -T + mg' \cos \alpha \\ m(2\dot{l}\dot{\alpha} + l\ddot{\alpha}) = -mg' \sin \alpha \end{cases}$$

La projection sur  $\vec{u}_\alpha$  donne l'équation différentielle du mouvement :  $\ddot{\alpha} + \frac{g'}{l} \sin \alpha = 0$

Si  $\alpha \ll 1$ , alors  $\ddot{\alpha} + \frac{g'}{l} \alpha = 0$ . On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g'}{l}} = \frac{2\pi}{T_0}$ , d'où  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$

## IV. PFD DANS LE RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE

### IV.1 PFD dans le référentiel géocentrique

#### a) Présentation des deux référentiels

- Soit  $M$  un point matériel.
  - On considère deux référentiels :  $\mathfrak{R}_0 = (S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel de Copernic galiléen et  $\mathfrak{R} = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel géocentrique non galiléen.
- $\mathfrak{R}$  est en translation par rapport à  $\mathfrak{R}_0$  :  $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} = \vec{0}$

#### b) Accélération d'entraînement du point $M$

L'accélération d'entraînement de  $m$  vaut :  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(T)_{\mathfrak{R}_0}$ . Pour calculer l'accélération du point  $T$  dans le référentiel de Copernic, il faut étudier le mouvement de la Terre autour du Soleil :

- Système = {Terre de masse  $M_T$ }
- Référentiel de Copernic :  $\mathfrak{R}_0 = (S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  galiléen
- Bilan des forces extérieures qui s'exercent sur la Terre : force exercée par tous les autres astres autres que la Terre (Soleil, Lune, planètes...)

$$M_T \vec{A}_a(T) = M_T \left( \frac{-GM_S}{ST^2} \vec{u}_{S \rightarrow T} - \frac{-GM_L}{LT^2} \vec{u}_{L \rightarrow T} + \dots \right)$$

en considérant la Terre et le Soleil à symétrie sphérique ce qui revient à les assimiler à des points matériels.

- Théorème de la quantité de mouvement à la Terre :  $M_T \vec{a}(T)_{\mathfrak{R}_0} = M_T \vec{A}_a(T)$ .

On en déduit donc l'accélération d'entraînement :  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(T)_{\mathfrak{R}_0} = \vec{A}_a(T)$

#### c) PFD dans le référentiel géocentrique non galiléen

- Système = {point matériel  $M$  de masse  $m$ }
- Référentiels :  $\mathfrak{R}_0 = (S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel de Copernic galiléen et  $\mathfrak{R} = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel géocentrique non galiléen.

- Bilan des forces :

➤ Force de gravitation exercée par la Terre :  $m \vec{A}_T(M) = m \left( \frac{-GM_T}{TM^2} \vec{u}_{T \rightarrow M} \right)$

- Force de gravitation due aux autres astres que la Terre (Soleil, Lune...):

$$m \vec{A}_a(M) = m \left( \frac{-GM_S}{SM^2} \vec{u}_{S \rightarrow M} + \frac{-GM_L}{LM^2} \vec{u}_{L \rightarrow M} + \dots \right)$$

- $\vec{f}$  : autres forces appliquées que les forces de gravitation (exemple : tension d'un fil...)

➤  $\vec{f}_{ie}(M) = -m \vec{a}_e(M) = -m \vec{A}_a(T)$

- $\vec{f}_{ic}(M) = \vec{0}$  car  $\mathfrak{R}$  est en translation par rapport à  $\mathfrak{R}_0$ .

- PFD :  $m \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = m \vec{A}_T(M) + m \vec{A}_a(M) + \vec{f} + \vec{f}_{ie}(M) + \vec{f}_{ic}(M)$ .

On obtient :  $m \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = m \vec{A}_T(M) + \vec{f} + m [\vec{A}_a(M) - \vec{A}_a(T)]$

On pose  $[\vec{A}_a(M) - \vec{A}_a(T)] = \Delta \vec{A}_a(M) = \vec{C}(M) =$  champ de marée.

**Pour passer du référentiel de Copernic galiléen au référentiel géocentrique, il faut donc ajouter le terme de marée :  $m [\vec{A}_a(M) - \vec{A}_a(T)]$ .**

#### Conséquence :

➤ contribution du soleil :  $A_{soleil} = \frac{GM_S}{TS^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{(150 \times 10^9)^2} = 6 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$

➤ contribution de la lune :  $A_{lune} = \frac{GM_L}{TL^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times \frac{6 \times 10^{24}}{81}}{(380000 \times 10^3)^2} = 3,4 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$

- en un point de la surface de la Terre :  $C_{soleil} = 5 \times 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$  (voir calculs dans le prochain paragraphe)

$$C_{lune} = 1,1 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$$

Le terme de marée  $\vec{C}$  est un terme différentiel du champ  $\vec{A}_a$ .  $\vec{C}$  est donc beaucoup moins intense que le champ  $\vec{A}_a$  lui-même (exemple  $5 \times 10^{-7} \ll 6 \times 10^{-3}$ ). On néglige les contributions des autres planètes...

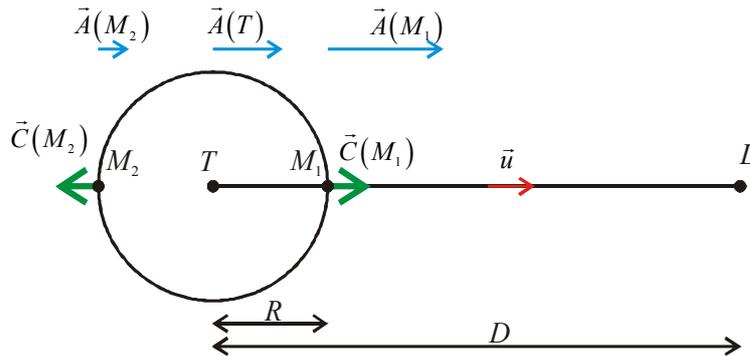
**Dans tous les exercices sauf l'étude des marées, on peut négliger  $\vec{C}$  et on peut considérer que le référentiel géocentrique est un excellent référentiel galiléen.**

*Généralisation dans le système solaire : on a le même résultat pour tout référentiel barycentrique d'une planète du système solaire. On a donc une structure « hiérarchique » du système solaire : chaque référentiel « planétocentrique » étant sensiblement galiléen, une planète peut être entourée de satellites qui orbitent autour de celle-ci de la même manière que la planète orbite autour du Soleil.*

#### IV.2 Effet de marée

On étudie le champ de marée  $\vec{C}$  créé par un astre, par exemple la Lune.

On le calcule en deux points  $M_1$  et  $M_2$ .



Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé de T (centre d'inertie de la Terre) vers L (centre d'inertie de la Lune).

Pour calculer  $\vec{C}(M_1)$  et  $\vec{C}(M_2)$ , on représente graphiquement  $\vec{A}(M_1)$ ,  $\vec{A}(M_2)$  et  $\vec{A}(T)$ .

On en déduit que  $\vec{C}(M_1) = \vec{A}_L(M_1) - \vec{A}_L(T)$  et  $\vec{C}(M_2) = \vec{A}_L(M_2) - \vec{A}_L(T)$

- $$\vec{C}(M_1) = \vec{A}_L(M_1) - \vec{A}_L(T) = GM_L \vec{u} \left( \frac{1}{(D-R)^2} - \frac{1}{D^2} \right)$$

$$\frac{1}{(D-R)^2} = \frac{1}{D^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{R}{D}\right)^2} \approx \frac{1}{D^2} \left(1 + \frac{2R}{D}\right) \text{ en faisant un DL à l'ordre 1 car } \frac{R}{D} \ll 1$$

$$\text{D'où } \vec{C}(M_1) = GM_L \vec{u} \left( \frac{1}{D^2} \left(1 + \frac{2R}{D}\right) - \frac{1}{D^2} \right) = \left( \frac{GM_L}{D^2} \right) \frac{2R}{D} \vec{u}$$

- De même, on obtient  $\vec{C}(M_2) = \vec{A}_L(M_2) - \vec{A}_L(T) = GM_L \vec{u} \left( \frac{1}{(D+R)^2} - \frac{1}{D^2} \right) \approx - \left( \frac{GM_L}{D^2} \right) \frac{2R}{D} \vec{u}$

car il suffit de remplacer  $R$  par  $-R$ .

Bilan :  $\vec{C}(M_1) = \left( \frac{GM_L}{D^2} \vec{u} \right) \left[ \frac{2R}{D} \right]$  et  $\vec{C}(M_2) = \left( - \frac{GM_L}{D^2} \vec{u} \right) \left[ \frac{2R}{D} \right]$

Ce n'est pas le champ créé par la lune qui intervient mais le champ créé par la lune multiplié par un facteur très petit  $\frac{2R}{D}$  (ces formules ne sont pas à connaître mais à savoir redémontrer).

La force  $m\vec{C}(M_1)$  représente donc l'effet de marée. Du fait de l'énormité des masses d'eau impliquées et de l'effet cumulatif des actions gravitationnelles, le phénomène de marée est d'ailleurs amplifié par les effets de résonance.

**On a deux directions opposées en  $M_1$  et  $M_2$ . On dit que l'on a un effet dislocateur. Ce n'est pas le champ créé par la lune qui intervient directement mais la différence de deux champs !!! Voir interprétation qualitative ci-dessous.**

$$\text{Ordre de grandeur : } A_{lune} = \frac{GM_L}{TL^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times \frac{6 \times 10^{24}}{81}}{(380\,000 \times 10^3)^2} = 3,4 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$$

$$C_{lune} = A_{lune} \frac{2R}{D} = 3,4 \times 10^{-5} \frac{2 \times 6400 \times 10^3}{380000 \times 10^3} = 1,1 \times 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$$

On peut faire les mêmes calculs pour le Soleil, on trouve :

$$A_{soleil} = \frac{GM_s}{TS^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{(150 \times 10^9)^2} = 6 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

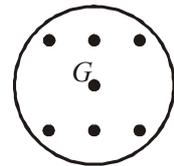
$$C_{soleil} = A_{soleil} \frac{2R}{D} = 6 \times 10^{-3} \frac{2 \times 6400 \times 10^3}{150 \times 10^9} = 5 \times 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$$

L'influence du Soleil et de la Lune sont de même ordre de grandeur, par contre le champ de marée a une norme très inférieure à  $A_T$  ( $10 \text{ m.s}^{-2}$  environ).

*Expérience pour interpréter qualitativement cet effet différentiel et donc ce terme de marée.*

*On considère une cabine remplie de billes. La cabine tombe en chute libre sur la Terre. Les billes placées en haut de la cabine sont soumises à un champ de pesanteur moins important et ont donc une accélération moins grande que celles situées au barycentre. Les billes placées en bas de la cabine sont soumises à un champ de pesanteur plus important et ont donc une accélération plus grande que celles situées au barycentre.*

*Un observateur lié à la cabine pendant la chute verra donc les billes se déplacer vers le haut par rapport à lui et les billes du bas se déplacer vers le bas. C'est donc bien la différence des champs de gravitation qui intervient, d'où ce terme différentiel et cet effet dislocateur.*



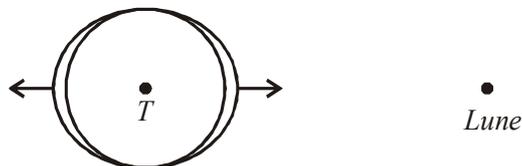
Terre

### **IV.3 Marées océaniques**

On a vu que la contribution principale est due à la Lune.

#### *a) Modèle d'une planète océan – action de la Lune*

Sous l'action du champ de marée  $\vec{C}(M)$ , l'océan se déforme en un « double-bourrelet » ayant une symétrie de révolution autour de l'axe  $GL$ .



**La Terre tourne sur elle-même en 24 heures environ. Chaque point de la Terre passe toutes les 12h sous un bourrelet, d'où l'existence de deux marées par jour.**

On peut affiner le modèle en tenant compte du fait que la direction  $TL$  n'est pas fixe dans le référentiel géocentrique mais y décrit un tour en 29 jours environ (mois lunaire).

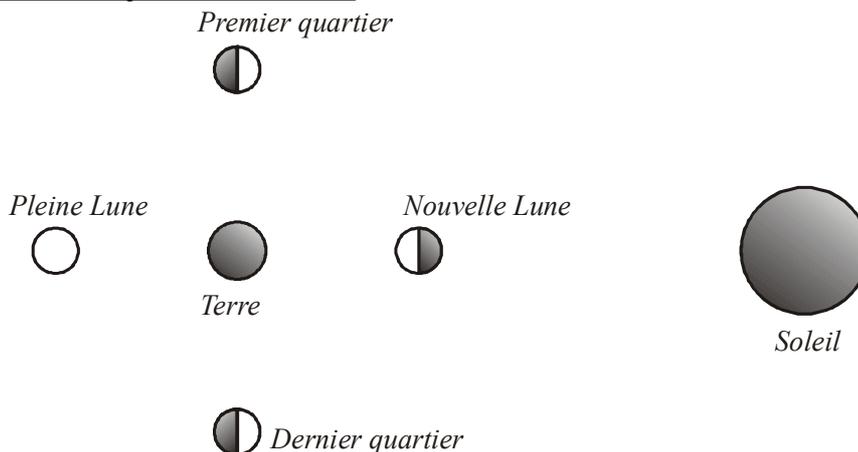
- À  $t = 0$ , on a une marée haute.
- 12h plus tard, l'axe des bourrelets a tourné d'un angle  $\alpha = \frac{2\pi}{29} 0,5$  puisque la période vaut 29 jours et la durée vaut 0,5 jour.
- Le point  $M$  devra parcourir cet angle supplémentaire pour retrouver une marée haute.

On a alors  $\alpha = \frac{2\pi}{24} \Delta t$  avec la période de rotation de la Terre = 24h et  $\Delta t$  en heures. On suppose que pendant

$\Delta t$  l'axe des bourrelets n'a quasiment pas varié. On obtient :  $\alpha = \frac{2\pi}{29} 0,5 = \frac{2\pi}{24} \Delta t$ , soit  $\Delta t = 0,41 \text{ h} = 25 \text{ min}$ .

On interprète le décalage journalier de 50 minutes.

b) On prend en compte l'action du Soleil



- Terre, Lune, Soleil : alignés. La face de la Lune éclairée par le Soleil est la face cachée. Nous sommes à la Nouvelle Lune. Le Soleil accentue le bourrelet déjà du à la Lune et l'on obtient des marées de **forte amplitude, dites marées de vive-eau**.
- On retrouve une marée de vive-eau au bout d'une demi-lunaison. Nous sommes à la Plein Lune. Les marées de vive-eau sont sensiblement bimensuelles.
- Par contre, lorsque la Lune est à son premier quartier ou à son dernier quartier, les deux astres tendent à créer des bourrelets d'axe orthogonaux, l'effet résultant, dû à l'action dominante de la Lune, soit un bourrelet moins accusé. On a des marées de **morte-eau**.

Il existe des marées exceptionnelles en certains lieux (21 m dans la baie de Fundy en Nouvelle-Ecosse, Canada – 14 m dans la baie du Mont Saint-Michel en France). Le comportement de l'océan est un phénomène dynamique qui fait intervenir la propagation d'ondes. Dans certaines baies, on a des cavités résonantes. On appelle marnage la différence de hauteur d'eau entre une pleine mer et une basse mer successive.

DATE	MARÉE à BREST			PHASES DE LA LUNE	SOLEIL (UT)	
	phase	HEURE LÉGALE	HAUTEUR en mètres		coef	GHA (AHVO)
DIM 1	PM 04 h 28 BM 10 h 51 PM 16 h 56 BM 23 h 14	7,65 m 1,35 m 7,55 m 1,40 m	98 101		00 h 179°12'2 T. pass: 12.03.26 06 h 269°10'4 D 06 h S. 23°02 12 h 359°08'6 D 12 h S. 23°01 18 h 89°06'8 D 18 h S. 23°00	LUN 16 PM 04 h 38, 6,95 m BM 11 h 01, 2,10 m PM 16 h 58, 6,90 m BM 23 h 13, 2,05 m
LUN 2	PM 05 h 18 BM 11 h 41 PM 17 h 44	7,85 m 1,20 m 7,60 m	104 105		00 h 179°05'0 T. pass: 12.03.54 06 h 269°03'3 D 06 h S. 22°57 12 h 359°01'5 D 12 h S. 22°56 18 h 88°59'8 D 18 h S. 22°54	MAR 17 PM 05 h 13, 7,15 m BM 11 h 37, 1,90 m PM 17 h 34, 7,05 m BM 23 h 49, 1,90 m
MAR 3	PM 00 h 02 BM 06 h 05 PM 12 h 28 BM 18 h 29	1,35 m 7,90 m 1,20 m 7,55 m	104 103		00 h 178°58'0 T. pass: 12.04.22 06 h 268°56'3 D 06 h S. 22°52 12 h 358°54'5 D 12 h S. 22°50 18 h 88°52'8 D 18 h S. 22°49	MER 18 PM 05 h 48, 7,30 m BM 12 h 13, 1,80 m PM 18 h 09, 7,15 m
MER 4	PM 00 h 48 BM 06 h 50 PM 13 h 14 BM 19 h 12	1,40 m 7,75 m 1,35 m 7,35 m	100 96		00 h 178°51'0 T. pass: 12.04.50 06 h 268°49'3 D 06 h S. 22°46 12 h 358°47'6 D 12 h S. 22°44 18 h 88°45'9 D 18 h S. 22°43	VEN 20 PM 01 h 01, 1,80 m BM 06 h 59, 7,35 m PM 13 h 24, 1,75 m BM 19 h 21, 7,10 m
JEU 5	PM 01 h 33 BM 07 h 33 PM 13 h 57 BM 19 h 54	1,65 m 7,50 m 1,65 m 7,05 m	91 86		00 h 178°44'2 T. pass: 12.05.17 06 h 268°42'5 D 06 h S. 22°39 12 h 358°40'8 D 12 h S. 22°38 18 h 88°39'1 D 18 h S. 22°36	SAM 21 PM 01 h 38, 1,85 m BM 07 h 36, 7,25 m PM 14 h 02, 1,90 m BM 20 h 00, 6,95 m
VEN 6	PM 02 h 16 BM 08 h 14 PM 14 h 40 BM 20 h 34	1,95 m 7,15 m 2,00 m 6,70 m	80 74		00 h 178°37'5 T. pass: 12.05.44 06 h 268°35'8 D 06 h S. 22°33 12 h 358°34'1 D 12 h S. 22°31 18 h 88°32'5 D 18 h S. 22°29	DIM 22 PM 02 h 19, 2,05 m BM 08 h 16, 7,00 m PM 14 h 44, 2,10 m BM 20 h 43, 6,70 m
SAM 7	PM 03 h 00 BM 08 h 57 PM 15 h 23 BM 21 h 17	2,35 m 6,75 m 2,45 m 6,30 m	67 61		00 h 178°30'8 T. pass: 12.06.10 06 h 268°29'2 D 06 h S. 22°25 12 h 358°27'6 D 12 h S. 22°24 18 h 88°25'9 D 18 h S. 22°22	LUN 23 PM 03 h 04, 2,25 m BM 09 h 01, 6,75 m PM 15 h 32, 2,40 m BM 21 h 33, 6,45 m
DIM 8	PM 03 h 46 BM 09 h 43 PM 16 h 10 BM 22 h 07	2,75 m 6,30 m 2,85 m 5,95 m	55 50		00 h 178°24'3 T. pass: 12.06.36 06 h 268°22'7 D 06 h S. 22°18 12 h 358°21'1 D 12 h S. 22°16 18 h 88°19'5 D 18 h S. 22°14	MAR 24 PM 03 h 55, 2,55 m BM 09 h 56, 6,45 m PM 16 h 28, 2,65 m BM 22 h 35, 6,25 m
LUN 9	PM 04 h 38 BM 10 h 37 PM 17 h 04 BM 23 h 09	3,10 m 5,95 m 3,15 m 5,70 m	45 42		00 h 178°18'0 T. pass: 12.07.01 06 h 268°16'4 D 06 h S. 22°10 12 h 358°14'8 D 12 h S. 22°08 18 h 88°13'3 D 18 h S. 22°05	MER 25 PM 04 h 58, 2,75 m BM 11 h 05, 6,20 m PM 17 h 37, 2,85 m BM 23 h 50, 6,15 m
MAR 10	PM 05 h 40 BM 11 h 44 PM 18 h 09 BM 24 h 03	3,35 m 5,70 m 3,35 m 5,65 m	39 38		00 h 178°11'7 T. pass: 12.07.25 06 h 268°10'2 D 06 h S. 22°01 12 h 358°08'7 D 12 h S. 21°59 18 h 88°07'1 D 18 h S. 21°57	JEU 26 PM 06 h 13, 2,85 m BM 12 h 27, 6,10 m PM 18 h 56, 2,80 m
MER 11	PM 06 h 23 BM 12 h 59 PM 19 h 22 BM 25 h 17	3,40 m 5,70 m 3,30 m 5,85 m	38 38		00 h 178°05'6 T. pass: 12.07.50 06 h 268°04'1 D 06 h S. 21°52 12 h 358°02'6 D 12 h S. 21°50 18 h 88°01'2 D 18 h S. 21°47	VEN 27 PM 01 h 12, 6,30 m BM 07 h 34, 2,65 m PM 13 h 50, 6,30 m BM 20 h 13, 2,55 m
JEU 12	PM 07 h 37 BM 13 h 03 PM 20 h 26 BM 26 h 16	5,80 m 3,20 m 5,85 m 3,10 m	40 43		00 h 177°59'7 T. pass: 12.08.13 06 h 267°58'2 D 06 h S. 21°43 12 h 357°56'8 D 12 h S. 21°40 18 h 87°55'3 D 18 h S. 21°38	SAM 28 PM 02 h 25, 6,65 m BM 08 h 47, 2,25 m PM 14 h 59, 6,70 m BM 21 h 18, 2,15 m
VEN 13	PM 08 h 59 BM 15 h 00 PM 21 h 16 BM 27 h 02	6,05 m 2,95 m 6,15 m 2,80 m	47 51		00 h 177°53'9 T. pass: 12.08.36 06 h 267°52'5 D 06 h S. 21°33 12 h 357°51'1 D 12 h S. 21°30 18 h 87°49'7 D 18 h S. 21°28	DIM 29 PM 03 h 26, 7,10 m BM 09 h 48, 1,85 m PM 15 h 56, 7,10 m BM 22 h 14, 1,75 m
SAM 14	PM 09 h 45 BM 16 h 22 PM 22 h 59 BM 28 h 47	6,40 m 2,65 m 6,40 m 2,55 m	56 61		00 h 177°48'3 T. pass: 12.08.58 06 h 267°46'9 D 06 h S. 21°23 12 h 357°45'5 D 12 h S. 21°20 18 h 87°44'1 D 18 h S. 21°17	LUN 30 PM 04 h 19, 7,50 m BM 10 h 41, 1,45 m PM 16 h 46, 7,40 m BM 23 h 03, 1,45 m
DIM 15	PM 10 h 24 BM 17 h 22 PM 24 h 37 BM 30 h 25	6,70 m 2,35 m 6,70 m 2,30 m	65 70		00 h 177°42'8 T. pass: 12.09.20 06 h 267°41'4 D 06 h S. 21°12 12 h 357°40'1 D 12 h S. 21°09 18 h 87°38'6 D 18 h S. 21°07	MAR 31 PM 05 h 07, 7,75 m BM 11 h 29, 1,20 m PM 17 h 30, 7,55 m BM 23 h 49, 1,30 m

#### IV.4 Effets de marée dans l'univers

- On a **ralentissement de la rotation propre de la Terre** (lente diminution de  $\omega = \frac{2\pi}{86164}$ , la période augmente de 1,8 ms par siècle) engendré par le « frottement » sur la Terre des bourrelets océaniques.
- En 2010, des chercheurs américains ont expliqué l'altitude élevée d'une large région de la face cachée de la Lune (25% de la face cachée de la lune) : il y a 4,4 milliards d'années, **la croûte alors séparée du manteau par un magma, a été soulevée par l'attraction de la Terre qui a exercé un gigantesque effet de marée**. Un processus géologique ultérieur aurait effacé le renflement de la partie visible, alors qu'elle a aussi subi l'effet de la marée terrestre.
- En supposant que dans un passé lointain où la Lune comportait des parties fluides, les marées exercées par la Terre ont freiné la rotation propre de la Lune (frottements entre le noyau et les océans et donc perte d'énergie). La lune a fini par se « bloquer » par rapport à la direction dans la direction *TL*. Elle montre donc en permanence la même face à la Terre.
- Ce phénomène de blocage par effet de marée est courant parmi les satellites des planètes.**
- L'action du champ de marées a un **effet dislocateur**. Au voisinage de planètes massives (Saturne par exemple), on observe des anneaux formés de petits blocs indépendants. En 1994, la comète Shoemaker-Lévy s'est disloquée par suite d'effets de marée en un chapelet de plusieurs fragments qui sont venus percuter successivement Jupiter.

### V. PED DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE

#### V.1 Poids d'un corps, champ de pesanteur terrestre

On va décrire l'expérience du fil à plomb : point matériel accroché à un fil en équilibre dans le référentiel terrestre.

- Système = {Point matériel *M* de masse *m*}.
- Référentiels :  $\mathcal{R}_0 = (T, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  géocentrique galiléen (on néglige le terme de marée) et  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel terrestre. L'origine *O* est un point de la terre et les vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont fixes dans le référentiel terrestre. On note  $\vec{v}$  la vitesse de *M* dans le référentiel terrestre et  $\vec{a}$  son accélération.
- Bilan des forces :
  - force de gravitation exercée par la Terre :  $m\vec{A}_T(M)$ . On néglige les autres forces de gravitation puisque le référentiel géocentrique est supposé galiléen.
  - $\vec{T}$  : tension du fil
  - $\vec{f}_{ic}(M) = m\omega^2 \overline{HM}$  car le point coïncidant avec *M* à l'instant *t* a une trajectoire circulaire uniforme dirigée vers *H* le projeté orthogonal de *M* sur l'axe des pôles.  $\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{86164} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$
  - $\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v}$
- PFD dans le référentiel terrestre :  $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{A}_T(M) + m\omega^2 \overline{HM} - 2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v}$

À l'équilibre du fil à plomb dans le référentiel terrestre, on a :  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\vec{a} = \vec{0}$ .

D'où  $\vec{0} = \vec{T} + m\vec{A}_T(M) + m\omega^2 \overline{HM}$

**Le poids d'un corps ou force de pesanteur terrestre qui s'exerce sur lui est défini expérimentalement comme la force opposée à celle qui le maintient en équilibre dans le référentiel terrestre.**

La direction du fil à plomb définit la verticale du lieu considéré.

On donc  $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$

En identifiant avec l'étude précédente, on a :

$$\vec{P} = m\vec{A}_T(M) + m\omega^2 \overline{HM}$$

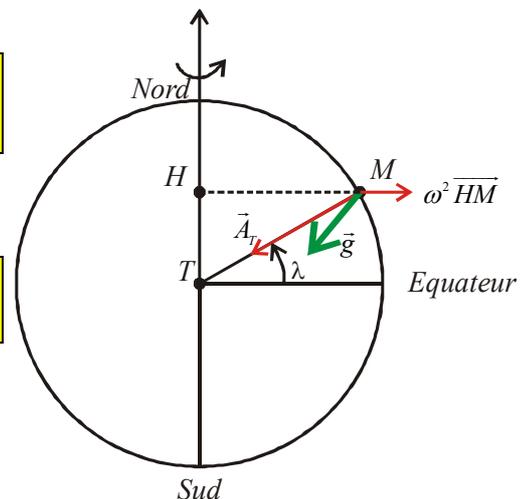
**Poids d'un corps = terme gravitationnel + terme centrifuge**

On définit le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}(M)$  au point *M* par :  $\vec{P} = m\vec{g}$ ,

d'où  $\vec{g} = \vec{A}_T(M) + \omega^2 \overline{HM}$

Si on suppose la terre à symétrie sphérique, on a alors  $\|\vec{A}_T\| = cte$ .

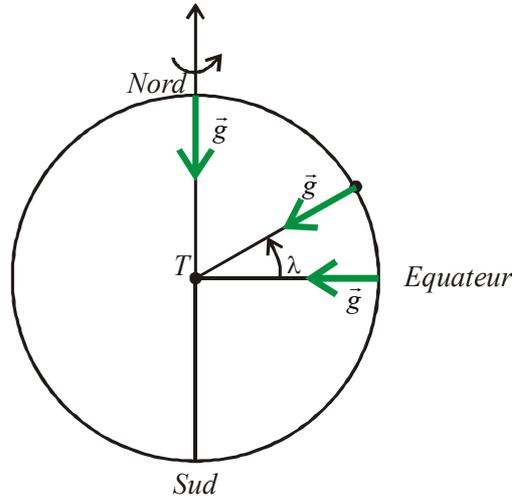
- Le terme  $\omega^2 \overline{HM}$  est nul aux pôles et maximal à l'équateur :  $\omega^2 R_T = \left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2 6400 \times 10^3 = 3,4 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$ . Le champ de pesanteur augmente quand on passe de l'équateur ( $9,78 \text{ m.s}^{-2}$ ) aux pôles ( $9,83 \text{ m.s}^{-2}$ ).
- L'angle de déviation  $\varepsilon = (\vec{A}_T, \vec{g})$  est très faible. Au maximum, il vaut  $1,73 \times 10^{-3} \text{ rad}$  au maximum. Sauf indication contraire, on considère que cet angle est négligeable.



La verticale du lieu pointe approximativement vers le centre de la terre  $T$ .

En première approximation, on considère que  $\vec{g} \approx \vec{A}_T$ . Dans les exercices, on a souvent :  $g = A_T = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

**Erreur fréquemment commise : représenter le champ de pesanteur terrestre par un vecteur dirigé vers le bas !!!  
Le champ de pesanteur terrestre est dirigé vers le centre de la terre...**



Compléments :  $g = (A_T - \omega^2 HM \cos \lambda) / \cos \varepsilon \approx (A_T - \omega^2 (R \cos \lambda) \cos \lambda) = A_T - R\omega^2 \cos^2 \lambda$

Pour  $\lambda = 0$ , on a :  $g_E = A_T - R\omega^2$ , d'où  $g - g_E = R\omega^2 \sin^2 \lambda$ , soit  $g = g_E (1 + a \sin^2 \lambda)$  avec  $a = \frac{R\omega^2}{g_E}$ .

On prévoit  $a = 3,46 \times 10^{-3}$ . L'expérience confirme la formule mais avec une valeur  $a = 5,29 \times 10^{-3}$ . L'écart s'explique par la non sphéricité de la Terre qui s'est aplatie précisément sous l'effet de la force centrifuge. On a aussi un terme correctif en  $\sin^2 \lambda$

## V.2 PFD dans le référentiel terrestre

On a vu que :  $m\vec{a} = \vec{T} + (m\vec{A}_T(M) + m\omega^2 \overline{HM}) - 2m\vec{\omega}_{\text{Terre}} \wedge \vec{v}$ .

On pose  $\vec{g} = \vec{A}_T(M) + \omega^2 \overline{HM}$ .

**Le PFD dans le référentiel terrestre s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_{\text{Terre}} \wedge \vec{v}$**

**Quand on passe du référentiel géocentrique au référentiel terrestre, la force d'inertie est donc comprise dans le poids. Par contre, il reste la force d'inertie de Coriolis.**

### V.3 Dynamique dans le référentiel terrestre

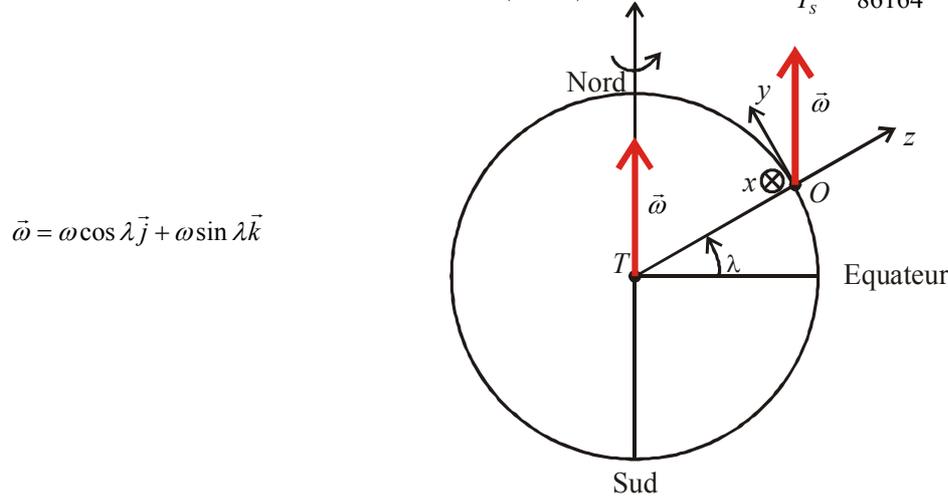
On va analyser l'influence de la force de Coriolis. On suppose que  $\vec{g}$  est uniforme sur tout le lieu de l'expérience (déplacement inférieur au kilomètre).

$\mathfrak{R}_0 = (T, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  = référentiel géocentrique. Les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sont dirigés vers des étoiles fixes.

$\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  = référentiel terrestre.  $O$  est un point fixe par rapport à la Terre. La Terre tourne d'Ouest en Est.

**L'axe  $Oz$  définit la verticale du lieu.**  $xOy$  est le plan horizontal local. En un point de la Terre, on repère les quatre points cardinaux. **L'axe  $Ox$  est dirigé vers l'Est. L'axe  $Oy$  est dirigé vers le Nord.** Le vecteur rotation instantané

$\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0}$  est noté  $\vec{\omega}$ . On le projette dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On a :  $\omega = \|\vec{\omega}\| = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{86164} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$



#### a) Mouvement dans le plan horizontal : force vers la « droite » dans l'hémisphère Nord

Le vecteur rotation peut s'écrire sous la forme :  $\vec{\omega} = \omega \cos \lambda \vec{j} + \omega \sin \lambda \vec{k}$

Dans le plan horizontal, la force de Coriolis s'écrit :

$$\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v} = -2m\omega \cos \lambda \vec{j} \wedge \vec{v} - 2m\omega \sin \lambda \vec{k} \wedge \vec{v}$$

- Le terme  $-2m\omega \cos \lambda \vec{j} \wedge \vec{v}$  est suivant  $Oz$ . Il se traduit par une modification minime du poids. Ce terme est très souvent négligé dans les calculs.
- Le terme  $-2m\omega \sin \lambda \vec{k} \wedge \vec{v}$  est dans le plan horizontal.

**On a donc une force orthogonale à la vitesse et dirigée vers la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord ( $\lambda > 0$ ).**

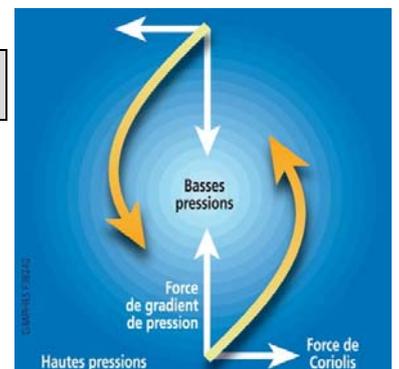
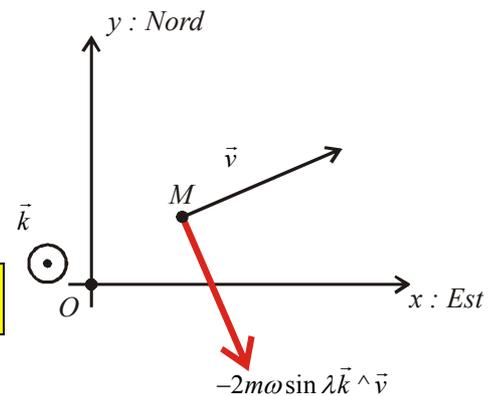
Calcul d'un ordre de grandeur :  $m = 1000 \text{ kg}$  ;  $\omega \approx 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$  ;  
 $v = 50 \text{ m.s}^{-1} \approx 180 \text{ km.h}^{-1}$  ;  $\sin \lambda \approx 1$ . On obtient

$\| -2m\omega \sin \lambda \vec{k} \wedge \vec{v} \| \approx 10 \text{ N}$ , c'est l'équivalent du poids d'une masse de 1 kg.

**Cet ordre de grandeur modeste confirme le caractère galiléen approché du référentiel terrestre et suffisant pour décrire les mouvements usuels.**

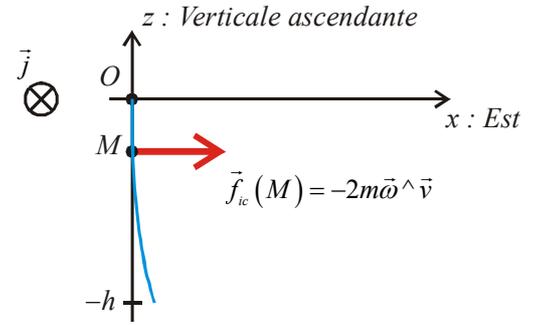
#### Application aux dépressions dans l'hémisphère Nord :

Supposons qu'un point de l'atmosphère prenne naissance une dépression. En l'absence de la force de Coriolis, le vent soufflerait radialement depuis les zones de pression plus élevées vers le centre de la dépression. En tenant compte de la force de Coriolis, on a une déviation du vent vers la droite. Il se forme des tourbillons qui s'enroulent dans le sens trigonométrique dans l'hémisphère Nord. C'est l'inverse dans l'hémisphère Sud.



b) Mouvement vertical : déviation vers l'Est de la chute libre

On suppose qu'à  $t = 0$ , le point  $M$  se situe au point  $O$  avec une vitesse initiale nulle.



- Système = {Point matériel  $M$  de masse  $m$ }.
- Référentiel :  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel terrestre non galiléen. L'origine  $O$  est un point de la terre et les vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont fixes dans le référentiel terrestre. On note  $\vec{v}$  la vitesse de  $M$  dans le référentiel terrestre et  $\vec{a}$  son accélération.
- Bilan des forces :
  - poids ou force de pesanteur terrestre :  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
  - Attention : comme le référentiel terrestre n'est pas galiléen, il faut rajouter  $\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v}$ . On a vu précédemment que la force d'inertie d'entraînement est comprise dans le poids quand on passe du référentiel géocentrique galiléen au référentiel terrestre non galiléen.

$$\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{86164} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{On a vu que } \vec{\omega} = \omega \cos \lambda \vec{j} + \omega \sin \lambda \vec{k}$$

- PFD dans le référentiel terrestre :  $m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v}$

**Pour calculer le mouvement du point matériel, on va utiliser ici la méthode de perturbation : Pour étudier la perturbation d'un mouvement à l'ordre 1, il suffit de calculer la force perturbatrice sur le mouvement non perturbé, dit à l'ordre 0.**

On peut continuer : pour étudier la perturbation d'un mouvement à l'ordre 2, il suffit de calculer la force perturbatrice sur le mouvement non perturbé à l'ordre 1 et de résoudre le PFD. On obtient ainsi une résolution de plus en plus précise du mouvement.

b1) Mouvement non perturbé à l'ordre 0

Le mouvement à l'ordre 0 est l'étude du point matériel soumis à la force de pesanteur  $\vec{P} = m\vec{g}$  puisqu'on

néglige la force de Coriolis. Le PFD projeté sur  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

b2) Mouvement perturbé à l'ordre 1

On reprend le bilan des forces en calculant la force de Coriolis avec le mouvement à l'ordre 0.

Bilan des forces :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$  et

$$\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v} = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge -gt\vec{k} = -2m \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \omega \cos \lambda & 0 \\ \omega \sin \lambda & -gt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2m\omega(\cos \lambda)gt & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le PFD projeté sur  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega(\cos \lambda)gt \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \dot{x} = \omega(\cos \lambda)gt^2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{1}{3}\omega(\cos \lambda)gt^3 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Application numérique : pour  $z = -h = -158 \text{ m}$ , on obtient  $x = +2,8 \text{ cm}$ .

L'expérience a été faite par Ferdinand Reich en 1833 à Freiberg en Allemagne ( $\lambda = 51^\circ$ ) qui a découvert la déviation vers l'Est. Dans l'hémisphère Sud, on observe également une déviation vers l'Est.

*Remarque : Si on fait les calculs à l'ordre 2, on met en évidence une déviation vers le Sud de quelques micromètres.*

### c) Pendule de Foucault

En 1852, Foucault mit en évidence la rotation de la Terre en étudiant le mouvement d'un pendule simple par rapport au référentiel terrestre  $\mathfrak{R}$ .

- Système = {Point matériel  $M$  de masse  $m$ }.
- Référentiel :  $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel terrestre non galiléen. L'origine  $O$  est un point de la terre et les vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont fixes dans le référentiel terrestre. On note  $\vec{v}$  la vitesse de  $M$  dans le référentiel terrestre et  $\vec{a}$  son accélération.
- Bilan des forces :
  - poids ou force de pesanteur terrestre :  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
  - tension du fil :  $\vec{T}$
  - Attention : comme le référentiel terrestre n'est pas galiléen, il faut rajouter  $\vec{f}_{ic}(M) = -2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}$ . On a vu précédemment que la force d'inertie d'entraînement est comprise dans le poids quand on passe du référentiel géocentrique galiléen au référentiel terrestre non galiléen.

$$\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{86164} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}. \text{ On a vu que } \boxed{\vec{\omega} = \omega \cos \lambda \vec{j} + \omega \sin \lambda \vec{k}}$$

- PFD dans le référentiel terrestre :  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_0} \wedge \vec{v}$ . Voir TD pour la résolution complète.

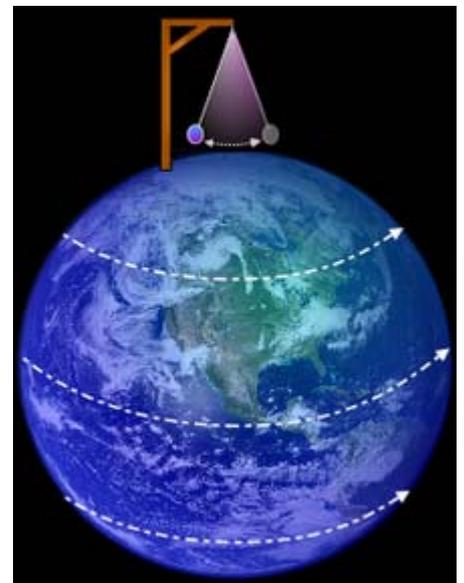
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Foucault-anim.gif>

Le comportement qualitatif d'un tel pendule s'interprète aisément au Pôle Nord. En effet, dans le référentiel géocentrique  $\mathfrak{R}_0 = (T, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , le pendule, écarté de sa position d'équilibre et abandonné à l'action de la force gravitationnelle et de la tension du fil, a par rapport à  $\mathfrak{R}_0$  un mouvement oscillatoire dans un plan fixe déterminé par les conditions initiales.

Dans le référentiel terrestre  $\mathfrak{R}$  qui tourne par rapport à  $\mathfrak{R}_0$  dans le sens Ouest-Est, ce plan semble donc effectuer une rotation autour de l'axe polaire dans le sens Est-Ouest avec une période de révolution  $T_p$  de 24 heures.

À Paris ( $\lambda = 48^\circ 51'$ ), seule la composante suivant la verticale du lieu intervient car  $\omega \sin \lambda \vec{k} = \vec{\omega}_z$  peut modifier la trajectoire du pendule dans le plan horizontal :  $\omega \sin \lambda = \omega_z$  et  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = 31 \text{ h } 52 \text{ min}$

À l'équateur ( $\lambda = 0$ ), le plan d'oscillation du pendule est immobile ( $T_p = \infty$ ).



## VI. IMPESANTEUR

### VI.1 Mouvement balistique

On dit d'un projectile (obus, véhicule spatial) que son **mouvement est balistique** si celui-ci s'effectue **sous la seule action d'un champ gravitationnel**, les autres forces étant toutes nulles ou ayant une somme nulle.

Exemple : planète en orbite dans le référentiel de Copernic :

$$\vec{F} = m\vec{a}_G = m\vec{A}(G), \text{ donc } \vec{a}_G = \vec{A}(G)$$

L'accélération du centre d'inertie  $G$  de la planète est indépendante de la nature du projectile (de sa masse notamment).

### VI.2 Identité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle

- Soit un point matériel chargé placé dans un champ électrique. La force est proportionnelle au champ électrique. On appelle le coefficient de proportionnalité :  $q$  la charge telle que  $\vec{F} = q\vec{E}$ .
- Soit un point matériel placé dans un champ gravitationnel. La force est proportionnelle au champ gravitationnel. On appelle le coefficient de proportionnalité :  $m_g$  masse gravitationnelle telle que :  $\vec{F} = m_g \vec{A}$
- Quand on écrit le PFD, la somme des forces est proportionnelle à l'accélération du point matériel. Le coefficient de proportionnalité est appelé masse inertielle, puisqu'il traduit l'inertie du point matériel, c'est-à-dire la difficulté à se mettre en mouvement. Plus  $m_i$  est grand, plus l'accélération est faible pour une force donnée.

Pour un mouvement balistique, on a donc  $\vec{F} = m_i \vec{a}_G = m_g \vec{A}(G)$ , soit  $\vec{a}_G = \frac{m_g}{m_i} \vec{A}(G)$

L'expérience indique que  $\frac{m_g}{m_i}$  est une constante universelle. Avec un choix convenable d'unités, on pose  $m_g = m_i = m$ .

On a donc identité de la masse gravitationnelle et de la masse inertielle (précision de  $10^{-11}$ ). Ce principe d'équivalence est à la base de la théorie de la relativité générale.

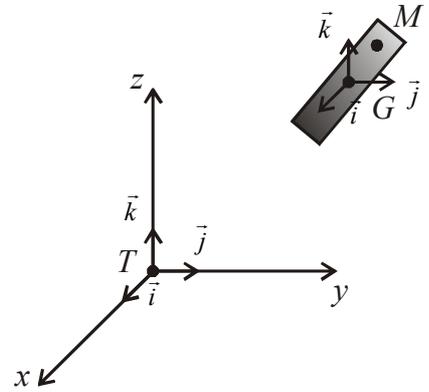
### VI.3 Impesanteur

**On dit que l'impesanteur règne dans un véhicule si la force qui s'exerce sur un fil-à-plomb fixe par rapport au véhicule est nulle.**

Le système étudié sera donc un point  $M$ . On va étudier le mouvement de  $M$  dans le référentiel barycentrique qui ne sera pas galiléen. On aura besoin de calculer l'accélération d'entraînement de  $M$ , c'est-à-dire l'accélération de  $G$  dans le référentiel géocentrique.

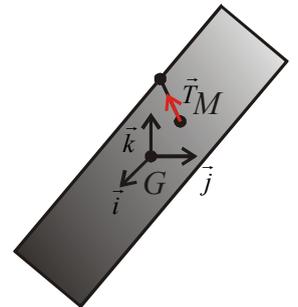
a) Expression de l'accélération de  $G$  dans le référentiel géocentrique : étude du mouvement de  $G$

- Système = {Véhicule spatial de masse  $M_V$ }.
- Référentiels :  $\mathfrak{R} = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel géocentrique galiléen.
- Bilan des forces :
  - force de gravitation :  $M_V \vec{A}_T(G)$ . On suppose la terre à symétrie sphérique. Le champ de gravitation résultant est équivalent au champ créé par le point  $T$  de masse  $M_T$ .
- Théorème du centre d'inertie :  $M_V \vec{a}(G)_{\mathfrak{R}} = M_V \vec{A}_T(G)$ , d'où  $\vec{a}(G)_{\mathfrak{R}} = \vec{A}_T(G)$



b) Etude du mouvement du point matériel  $M$

- Système = {Point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à un fil dans le véhicule spatial}.
- Référentiels :  $\mathfrak{R} = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel géocentrique galiléen et  $\mathfrak{R}^* = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  référentiel barycentrique non galiléen. On note  $\vec{v}^*$  la vitesse de  $M$  dans le référentiel  $\mathfrak{R}^*$  et  $\vec{a}^*$  son accélération dans  $\mathfrak{R}^*$ .
- Bilan des forces :
  - force de gravitation :  $m \vec{A}_T(M)$ .
  - force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie}(M) = m \vec{a}_e(M) = -m \vec{a}(G)_{\mathfrak{R}}$ . D'après le paragraphe a), on a :  $\vec{f}_{ie}(M) = -m \vec{A}_T(G)$
  - force d'inertie de Coriolis :  $\vec{f}_{ic}(M) = -2m \vec{\omega}_{\mathfrak{R}^*/\mathfrak{R}} \wedge \vec{v}^* = \vec{0}$  car  $\vec{\omega}_{\mathfrak{R}^*/\mathfrak{R}} = \vec{0}$  puisque  $\mathfrak{R}^*$  est en translation par rapport à  $\mathfrak{R}$ .
- PFD dans le référentiel géocentrique :  $m \vec{a}^* = m \vec{A}_T(M) - m \vec{A}_T(G) + \vec{T} = m (\vec{A}_T(M) - \vec{A}_T(G)) + \vec{T}$ .



À l'équilibre de la masse  $m$ , on a :  $\vec{0} = m (\vec{A}_T(M) - \vec{A}_T(G)) + \vec{T}$ .

Les champs de gravitation en  $M$  et  $G$  sont très voisins, donc  $\vec{T} \approx \vec{0}$ . On a donc des conditions d'impesanteur.

**L'impesanteur s'observe au voisinage du centre de masse d'un véhicule en mouvement balistique, c'est-à-dire se déplaçant sous la seule action du champ gravitationnel.**

Exemples :

- chute libre d'un ascenseur dont le câble s'est rompu : les passagers « flottent ». Il existe des tours de chute libre pour étudier les propriétés des matériaux en impesanteur.
- Impesanteur approchée à l'intérieur d'avions : pendant 20 secondes environ, le pilote réduit fortement la poussée des moteurs de telle façon que toutes les forces qui agissent sur l'appareil s'annulent, sauf la force de gravitation. L'avion est dans une phase 0 g.  
<http://users.skynet.be/Equimass/Vol.html>  
<http://www.educnet.education.fr/orbito/pedago/zerog/zerog1.htm>



- Dans l'espace, impesanteur à l'intérieur des véhicules spatiaux tout au long de la phase balistique de leur mouvement, quelque soit la nature de la trajectoire et la proximité des divers astres, à conditions que les moteurs soient à l'arrêt.

