FORMULE FONDAMENTALE DE LA DÉRIVATION VECTORIELLE – CALCULS D'INTÉGRALES

I. CAS OÙ PLUSIEURS RÉFÉRENTIELS SONT EN JEU

I.1 Dérivée d'un vecteur dans deux référentiels

Soient deux référentiels $\Re = \left(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ et $\Re' = \left(O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$. On est dans le cas le plus général.

On considère un vecteur $\vec{A}$ quelconque.

- On peut projeter ce vecteur dans la base $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$: $\vec{A} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_2$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 + \dot{x}_3\vec{e}_3 \text{ car } \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) \text{ est fixe dans } \Re$$

- On peut projeter ce vecteur dans la base $\left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$: $\vec{A} = x'_1\vec{e}\,'_1 + x'_2\vec{e}\,'_2 + x'_3\vec{e}\,'_3$

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'} = \dot{x}'_1\vec{e}\,'_1 + \dot{x}'_2\vec{e}\,'_2 + \dot{x}'_3\vec{e}\,'_3} \text{ car } \left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right) \text{ est fixe dans } \Re'$$

I.2 Relation entre les deux dérivées

$\vec{A} = x'_1\vec{e}\,'_1 + x'_2\vec{e}\,'_2 + x'_3\vec{e}\,'_3$

On dérive ce vecteur dans le référentiel $\Re$. Attention, il faut dériver les vecteurs unitaires qui ne sont pas fixes dans $\Re$.

On obtient donc : $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\dot{x}'_1\vec{e}\,'_1 + \dot{x}'_2\vec{e}\,'_2 + \dot{x}'_3\vec{e}\,'_3\right) + \left(x'_1\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} + x'_2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} + x'_3\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}\right)$

On reconnaît la première parenthèse : $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'} = \dot{x}'_1\vec{e}\,'_1 + \dot{x}'_2\vec{e}\,'_2 + \dot{x}'_3\vec{e}\,'_3$

On a donc : $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'} + \vec{B}$.

Il reste à déterminer $\vec{B} = x'_1\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} + x'_2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} + x'_3\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$

I.3 Relation importante pour la dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\overrightarrow{IJ}$ un vecteur de norme constante : $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2 = cte$

$$\frac{\mathrm{d}\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{IJ}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$$

La dérivée de tout vecteur de norme constante (en particulier tout vecteur unitaire) est orthogonale à ce vecteur.

I.4 HORS PROGRAMME : Démonstration introduisant le vecteur rotation instantané

$\vec{B} = x'_1\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} + x'_2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} + x'_3\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$

On projette les vecteurs $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}, \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}, \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$ dans la base $\left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$ sachant que $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_i}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} \perp \vec{e}\,'_i$ pour tout *i*.

$$\begin{cases} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \alpha_2\vec{e}\,'_2 + \alpha_3\vec{e}\,'_3 \\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \beta_1\vec{e}\,'_1 + \beta_3\vec{e}\,'_3 \\ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \gamma_1\vec{e}\,'_1 + \gamma_2\vec{e}\,'_2 \end{cases}$$

$\vec{e}\,'_1\cdot\vec{e}\,'_2 = 0$, donc $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}\cdot\vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_1\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = 0 = \alpha_2 + \beta_1$. On a donc $\boxed{\beta_1 = -\alpha_2}$.

$\vec{e}\,'_2 \cdot \vec{e}\,'_3 = 0$, donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} \cdot \vec{e}\,'_3 + \vec{e}\,'_2 \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = 0 = \beta_3 + \gamma_2$. On a donc $\boxed{\gamma_2 = -\beta_3}$

$\vec{e}\,'_1 \cdot \vec{e}\,'_3 = 0$, donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} \cdot \vec{e}\,'_3 + \vec{e}\,'_1 \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = 0 = \alpha_3 + \gamma_1$. On a donc $\boxed{\alpha_3 = -\gamma_1}$.

On a donc : $\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \alpha_2 \vec{e}\,'_2 - \gamma_1 \vec{e}\,'_3 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = -\alpha_2 \vec{e}\,'_1 + \beta_3 \vec{e}\,'_3 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \gamma_1 \vec{e}\,'_1 - \beta_3 \vec{e}\,'_2 \end{cases}$. Or $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}\,'_3 \wedge \vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}\,'_2 \wedge \vec{e}\,'_3$ et $\vec{e}\,'_3 = -\vec{e}\,'_2 \wedge \vec{e}\,'_1$

On en déduit : $\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\alpha_2 \vec{e}\,'_3 + \gamma_1 \vec{e}\,'_2\right) \wedge \vec{e}\,'_1 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\alpha_2 \vec{e}\,'_3 + \beta_3 \vec{e}\,'_1\right) \wedge \vec{e}\,'_2 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\gamma_1 \vec{e}\,'_2 + \beta_3 \vec{e}\,'_1\right) \wedge \vec{e}\,'_3 \end{cases}$. On peut rajouter $\beta_3 \vec{e}\,'_1 \wedge \vec{e}\,'_1 = \vec{0}$, $\gamma_1 \vec{e}\,'_2 \wedge \vec{e}\,'_2 = \vec{0}$ et $\alpha_2 \vec{e}\,'_3 \wedge \vec{e}\,'_3 = \vec{0}$

Soit $\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\beta_3 \vec{e}\,'_1 + \alpha_2 \vec{e}\,'_3 + \gamma_1 \vec{e}\,'_2\right) \wedge \vec{e}\,'_1 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\alpha_2 \vec{e}\,'_3 + \beta_3 \vec{e}\,'_1 + \gamma_1 \vec{e}\,'_2\right) \wedge \vec{e}\,'_2 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_3}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\gamma_1 \vec{e}\,'_2 + \beta_3 \vec{e}\,'_1 + \alpha_2 \vec{e}\,'_3\right) \wedge \vec{e}\,'_3 \end{cases}$

Finalement, on pose $\vec{\omega} = \beta_3 \vec{e}\,'_1 + \gamma_1 \vec{e}\,'_2 + \alpha_2 \vec{e}\,'_3$ et $\forall i \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_i}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}\,'_i$

$\vec{B} = \sum_i x'_i \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_i}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \sum_i x'_i \vec{\omega} \wedge \vec{e}\,'_i = \vec{\omega} \wedge \sum_i x'_i \vec{e}\,'_i = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$

II. FORMULE FONDAMENTALE DE LA DÉRIVATION VECTORIELLE

II.1 Équation différentielle du mouvement

Soient deux référentiels $\Re = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\Re' = (O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{A}$$

$\vec{\omega}$ est entièrement déterminé à partir des $\vec{e}\,'_i$ et de $\Re$. Il ne dépend que du mouvement de $\Re'$ par rapport à $\Re$. $\vec{\omega}$ est appelé vecteur rotation instantané de $\Re'$ par rapport à $\Re$ et noté $\vec{\omega}_{\Re'/\Re}$.

(voir paragraphe sur les coordonnées cylindriques pour l'origine du nom).

II.2 Cas particulier de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre

Les vecteurs unitaires $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ gardent des directions fixes dans le référentiel $\Re$. On a donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_i}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \vec{0}$, donc $\vec{B} = \vec{0}$ pour tout vecteur $\vec{A}$, d'où $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$.

Si $\Re'$ est en translation par rapport à $\Re$, alors $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \vec{0}$.

II.3 Trois référentiels

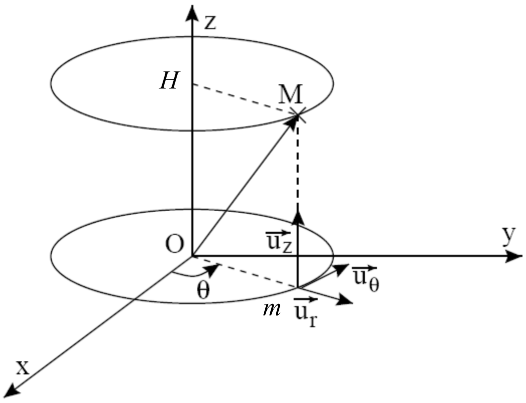
- $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re''} + \vec{\omega}_{\Re''/\Re} \wedge \vec{A}$ (1)
- $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{A}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re''} + \vec{\omega}_{\Re''/\Re'} \wedge \vec{A}$.

On en déduit que $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re''} + \vec{\omega}_{\Re''/\Re'} \wedge \vec{A} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{A}$ (2)

- En identifiant (1) et (2), on a : $\vec{\omega}_{\Re''/\Re} \wedge \vec{A} = \left(\vec{\omega}_{\Re''/\Re'} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re}\right) \wedge \vec{A}$. Cette relation est vraie pour tout vecteur $\vec{A}$. D'où

$$\boxed{\vec{\omega}_{\Re''/\Re} = \vec{\omega}_{\Re''/\Re'} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re}}$$

II.4 Coordonnées cylindriques



Il suffit d'appliquer la formule de la dérivation vectorielle à deux vecteurs unitaires connus : $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$ avec $\Re = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ et $\Re' = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$.

- $\cancel{\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}} = \cancel{\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'}} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{k}$, donc $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} // \vec{k}$, soit $\boxed{\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \lambda \vec{k}}$
- $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \cancel{\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'}} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{u}_r$. On a vu que $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$

D'où $\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \cancel{\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'}} + \lambda \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \lambda \vec{u}_\theta$, d'où $\boxed{\lambda = \dot{\theta}}$.

Coordonnées cylindriques : $\Re = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ et $\Re' = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$: $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \dot{\theta}\vec{k}$

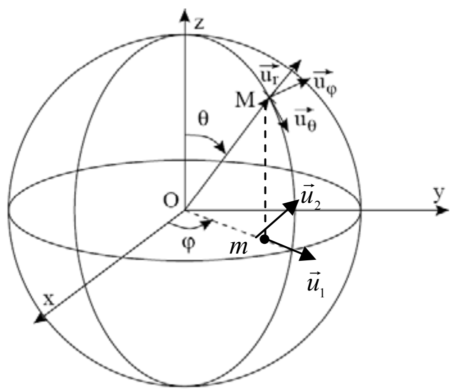
<u>Interprétation</u> : Le référentiel $\Re' = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$ est en rotation par rapport au référentiel $\Re = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$. Cette rotation se fait autour de l'axe *Oz* à la vitesse angulaire $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} = \omega$.

$\vec{\omega}_{\Re'/\Re}$ contient la vitesse angulaire algébrique $\dot{\theta}$ et le vecteur unitaire $\vec{u}_z$. Si on applique la règle de la main droite (les 4 doigts de la main droite tournent dans le sens de $\vec{u}_\theta$ et le pouce est suivant $\vec{u}_z$) ou du tire-bouchon, on retrouve bien $\vec{u}_z$. D'où le nom donné à $\vec{\omega}_{\Re'/\Re}$: vecteur rotation.

Le plus souvent, $\dot{\theta}$ (vitesse angulaire instantanée) varie au cours du temps, d'où le nom donné à $\vec{\omega}_{\Re'/\Re}$: vecteur rotation instantané de $\Re'$ par rapport à $\Re$.

On peut en déduire les dérivées des différents vecteurs unitaires : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re} = \cancel{\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'}} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} \wedge \vec{u}_\theta = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

II.5 Coordonnées sphériques



On utilise 3 référentiels : $\Re = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$, $\Re' = \left(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_z\right)$ et $\Re'' = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$

- Passage de $\Re = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ à $\Re' = \left(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_z\right)$: rotation d'angle φ autour de $\vec{u}_z$, donc $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \dot{\varphi}\vec{u}_z$.
- Passage de $\Re' = \left(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_z\right)$ à $\Re'' = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$: rotation d'angle θ autour de $\vec{u}_\varphi$, donc $\vec{\omega}_{\Re''/\Re'} = \dot{\theta}\vec{u}_\varphi$.
- On en déduit que $\vec{\omega}_{\Re''/\Re} = \vec{\omega}_{\Re''/\Re'} + \vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \dot{\theta}\vec{u}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{u}_z$

Coordonnées sphériques : $\Re = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ et $\Re'' = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$: $\vec{\omega}_{\Re''/\Re} = \dot{\theta}\vec{u}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{u}_z$

III. CALCUL D'INTÉGRALES

III.1 Coordonnées cartésiennes

On considère un parallélépipède de dimensions a, b, c.
On cherche à déterminer sa masse sachant que sa masse volumique est uniforme.

La masse volumique μ est définit par $\mu = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}$.

- La masse d'un élément de volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ vaut : $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Pour exprimer la masse totale, il faut faire la somme de toutes les masses élémentaires. Pour décrire le parallélépipède, il faut trois variables. On écrit donc une intégrale triple : $M = \iiint_V \mathrm{d}m$. Comme les variables sont indépendantes, cela revient à faire le produit de trois intégrales : $M = \iiint_V \mu \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mu\left(\int_{x=0}^{a} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=0}^{b} \mathrm{d}y\right)\left(\int_{z=0}^{c} \mathrm{d}z\right) = \mu abc$

III.2 Coordonnées cylindriques

a) Premier exemple

Calculer la masse d'un cylindre homogène de hauteur h et de rayon R. Les coordonnées cylindriques sont adaptées à cause de la symétrie du problème. Pour décrire le volume, il faut faire varier r entre 0 et R, θ entre 0 et 2π et z entre 0 et h. Les variables sont indépendantes.

- La masse d'un élément de volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ vaut : $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)(\,\mathrm{d}z)$.
- Pour exprimer la masse totale, il faut faire la somme de toutes les masses élémentaires.

$$M = \iiint_V \mu r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \mu\left(\int_{r=0}^{R} r\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{z=0}^{h} \mathrm{d}z\right) = \mu\frac{R^2}{2}2\pi h = \mu\pi R^2 h$$

b) Deuxième exemple

Surface d'un disque : pour décrire le disque, on fait varier r entre 0 et R, θ entre 0 et 2π.

$$\mathrm{d}S = (\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta) \text{ et } S = \iint_S \mathrm{d}S = \left(\int_{r=0}^{R} r\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2$$

III.3 Coordonnées sphériques

a) Premier exemple

Calculer la masse d'une sphère homogène de rayon R. Les coordonnées sphériques sont adaptées à cause de la symétrie du problème. Pour décrire le volume, il faut faire varier r entre 0 et R, θ entre 0 et π et φ entre 0 et 2π. Les variables sont indépendantes.

- La masse d'un élément de volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ vaut : $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r\,\mathrm{d}\theta)(\,r\sin\theta \mathrm{d}\varphi)$.
- Pour exprimer la masse totale, il faut faire la somme de toutes les masses élémentaires.

$$M = \iiint_V \mu r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta r \sin\theta \mathrm{d}\varphi = \mu\left(\int_{r=0}^{R} r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right) = \mu\frac{R^3}{3}\times 2\times 2\pi = \mu\frac{4}{3}\pi R^3$$

b) Deuxième exemple

Surface d'une sphère de rayon R : pour décrire la sphère, il faut faire varier, θ entre 0 et π et φ entre 0 et 2π.

$$\mathrm{d}S = (R\mathrm{d}\theta)(R\sin\theta \mathrm{d}\varphi) \text{ et } S = \iiint_V R\mathrm{d}\theta R\sin\theta \mathrm{d}\varphi = R^2\left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right) = R^2\times 2\times 2\pi = 4\pi R^2$$

c) Troisième exemple

Volume compris entre la sphère de rayon r et de rayon r + dr.
Deux méthodes :

- Première méthode : volume $= \dfrac{4}{3}\pi(r+\mathrm{d}r)^3 - \dfrac{4}{3}\pi(r)^3$. On fait un développement limité :

$$(r+\mathrm{d}r)^3 = r^3\left(1+\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^3 = r^3\left(1+3\frac{\mathrm{d}r}{r}\right) = r^3 + 3r^2\mathrm{d}r$$

D'où volume $= \dfrac{4}{3}\pi(r+\mathrm{d}r)^3 - \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \cancel{\dfrac{4}{3}\pi r^3} + \dfrac{4}{3}\pi 3r^2\mathrm{d}r - \cancel{\dfrac{4}{3}\pi r^3} = 4\pi r^2\mathrm{d}r$

- Deuxième méthode : On obtient directement le volume en multipliant la surface la sphère $4\pi r^2$ par l'épaisseur dr. Soit $4\pi r^2\mathrm{d}r$.