DÉRIVATION VECTORIELLE
COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

I. DÉRIVATION VECTORIELLE

I.1Définition

Soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base orthonormée directe. Soit $\Re=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un référentiel.

On considère un vecteur quelconque qui dépend du temps *t*. On projette ce vecteur dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

$$\vec{A}(t)=x_1(t)\vec{e}_1+x_2(t)\vec{e}_2+x_3(t)\vec{e}_3$$

Par définition, la dérivée de $\vec{A}(t)$ par rapport au temps *t* et relativement au référentiel $\Re$ est :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}=\dot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_2\vec{e}_2+\dot{x}_3\vec{e}_3$$

Rappels : les vecteurs $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ sont fixes dans le référentiel $\Re$.

I.2 Propriétés

$$\left(\frac{\mathrm{d}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}=\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}+\left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$$

$\left(\frac{\mathrm{d}\left(\lambda\vec{A}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}=\lambda\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$ si λ est un réel constant.

I.3 Dérivée d'un produit scalaire

$$\left(\frac{\mathrm{d}\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}=\vec{u}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}+\vec{v}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$$

I.4 Dérivée d'un produit vectoriel

$$\left(\frac{\mathrm{d}\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}=\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$$

Attention : l'ordre des vecteurs est impératif.

I.5 Conclusion

La dérivée d'un vecteur $\vec{A}(t)$ par rapport au temps dépend du référentiel.

On verra plus tard la relation entre $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}$ et $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re'}$.

S'il n'y a aucune ambiguïté dans l'exercice, on peut oublier la notation $\Re$ et écrire $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)$.

En mécanique, tous les vecteurs peuvent varier *a priori*. On utilisera les mêmes règles de dérivation qu'avec des fonctions. Dans les chapitres qui suivront, on travaillera dans un seul référentiel par contre, on projettera le résultat (par exemple le vecteur vitesse) dans telle ou telle base de projection (base des coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques).

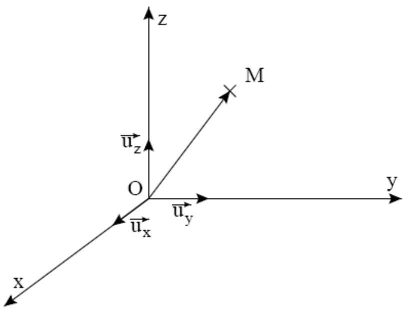
$$\frac{\mathrm{d}\left(\alpha(t)\vec{u}+\beta(t)\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}=\dot{\alpha}\,\vec{u}+\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}+\dot{\beta}\,\vec{v}+\beta\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

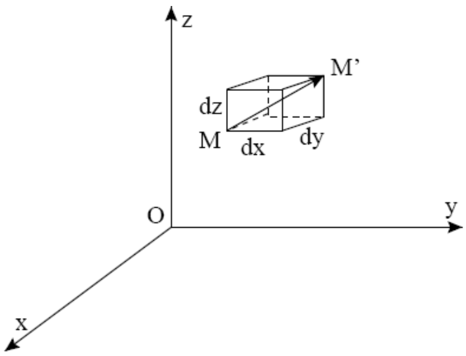
Si $\Re=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ et $\vec{A}(t)=x_1(t)\vec{e}_1+x_2(t)\vec{e}_2+x_3(t)\vec{e}_3$, on retrouve facilement $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\Re}=\dot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_2\vec{e}_2+\dot{x}_3\vec{e}_3$ puisque $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est fixe dans $\Re$.

II. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

On considère un point M et le référentiel $\Re = \left(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$. Toutes les vitesses et déplacements sont calculés dans le référentiel $\Re$.

Le point M est repéré par les coordonnées cartésiennes $\left(x, y, z\right)$.





$-\infty < x, y, z < \infty$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$$

Le déplacement élémentaire vaut : $\mathrm{d}\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$ **.**

Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

On en déduit : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$x = cte$: $\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$y = cte$: $\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

$z = cte$: $\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

III. COORDONNÉES CYLINDRIQUES OU SEMI-POLAIRES

III.1 Définition

On considère un point M et le référentiel $\Re = \left(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$. Toutes les vitesses et déplacements sont calculés dans le référentiel $\Re$. Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques $\left(r, \theta, z\right)$.

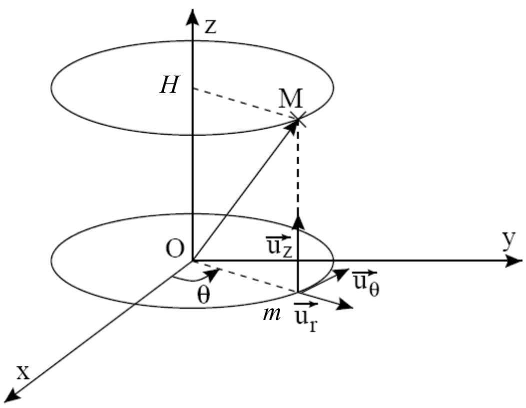
On utilisera les coordonnées cylindriques dès que la distance à l'axe *Oz* joue un rôle important dans l'exercice.

On définit le point H projeté orthogonal de M sur l'axe Oz et le point m projeté orthogonal de M dans le plan Oxy.

On définit le **vecteur radial** $\vec{u}_r$ dirigé de O vers m.

On définit le **vecteur orthoradial** $\vec{u}_\theta$ tel que la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$ soit orthonormée directe.

On a alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$



Pour recouvrir l'espace une seule, on astreint ces coordonnées à rester dans les intervalles : $0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < +\infty$

En physique, on a toujours $r \ge 0$.

On peut passer facilement des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

Si $z = 0$, le mouvement est plan. On dit que l'on a des coordonnées polaires.
On retient par cœur :

Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques (r,θ,z). On a : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

Remarque : ne pas rajouter une coordonnée suivant le vecteur orthoradial !!! On retrouve cette formule avec le schéma et la relation de Chasles.

III.2 Base des coordonnées cylindriques

À chaque instant t, on a donc une base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On verra que cette base de projection sera très pratique à utiliser dans les exercices où la distance à un axe joue un rôle important.
Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque.

Ce vecteur quelconque peut être projeté dans :

- **la base des coordonnées cartésiennes. $\vec{A}$ a pour coordonnées (A_x, A_y, A_z). On a alors : $\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$**
- **la base des coordonnées cylindriques. $\vec{A}$ a pour coordonnées (A_r, A_ϑ, A_z). A_r est appelée coordonnée radiale, A_θ est appelé coordonnée orthoradiale. On a alors : $\vec{A} = A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_z\vec{u}_z$**

III.3 Dérivation des vecteurs unitaires

Comment dériver $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ par rapport au temps dans le référentiel $\Re$? La méthode est de projeter dans ce référentiel et de calculer la dérivée des différentes composantes.

On a donc : $\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{cases}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right)_\Re = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{u}_x + \dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_y = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right)_\Re = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_x - \dot{\theta}\sin\theta\vec{u}_y = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

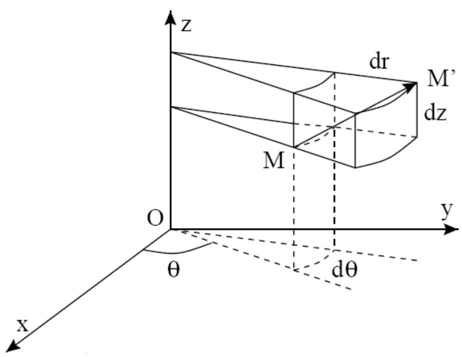
$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right)_\Re = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \ ; \ \left(\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right)_\Re = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

Il faut connaître par cœur le résultat et surtout la méthode consistant à projeter dans une base de projection fixe dans le référentiel $\Re$.

III.4 Vitesse du point M et déplacement élémentaire

$$\vec{v}(M)_\Re = \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\vec{u}_z = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$$

Comme $\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$, on a : $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$



Interprétation graphique :

- Si θ et z sont fixés. On fait varier r de dr. Le point M se déplace parallèlement à $\vec{u}_r$ de dr. On retrouve donc : $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{u}_r$.
- Si r et z sont fixés. On fait varier θ de $\mathrm{d}\theta$. Le point M se déplace parallèlement à $\vec{u}_\theta$ sur le cercle de centre H et de rayon r. Comme la variation d'angle vaut $\mathrm{d}\theta$, le déplacement est donc $r\mathrm{d}\theta$, d'où $\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$
- Si r et θ sont fixés. On fait varier z de dz. Le point M se déplace parallèlement à $\vec{u}_z$ de dz. On retrouve donc : $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}z\vec{u}_z$

La vitesse du point M vaut : $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$

Le déplacement élémentaire vaut : $\mathrm{d}\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$.

Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

Ces résultats sont à connaître par cœur et peuvent s'en déduire graphiquement.

$\vec{u}_r$ est dans le sens des r croissants. De même pour $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ dans le sens des θ et z croissants.

On en déduit : $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z)$.

$r = cte$: $\mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

$\theta = cte$: $\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

$z = cte$: $\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les cylindres de rayon r et de rayon $r + \mathrm{d}r$.

$$\pi(r+\mathrm{d}r)^2 H - \pi r^2 H = \pi r^2\left(1+\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^2 H - \pi r^2 H = \pi r^2\left(1+\frac{2\mathrm{d}r}{r}\right)H - \pi r^2 H = 2\pi r\mathrm{d}rH$$

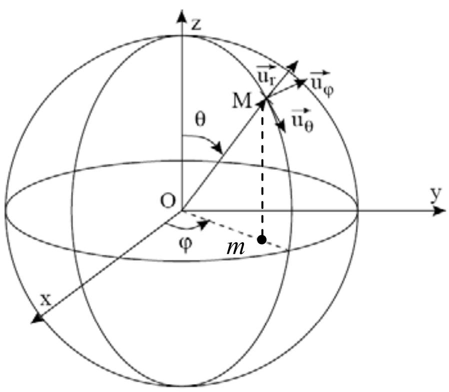
Le volume élémentaire compris entre les cylindres de rayon r et de rayon r + dr est la surface du cylindre de rayon r et de hauteur H multipliée par dr : $\mathrm{d}\tau = 2\pi r\mathrm{d}rH$

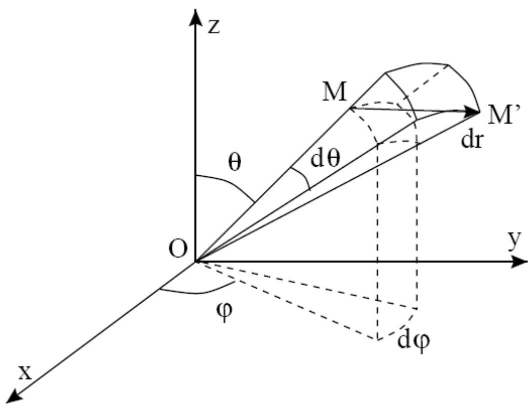
IV. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

IV.1 Définition

On considère un point M et le référentiel $\Re = (O;\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. Toutes les vitesses et déplacements sont calculés dans le référentiel $\Re$. Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques (r,θ,φ) .

On utilisera les coordonnées sphériques dès que la distance au centre joue un rôle important dans l'exercice.





On appelle r la distance OM. Soit $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire dirigé de O vers M. On a alors : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

Soit m le projeté orthogonal de M dans le plan Oxy. On définit $\varphi = (\vec{u}_x,\overrightarrow{Om})$ et $\theta = (\vec{u}_z,\overrightarrow{OM})$

On définit donc 3 vecteurs unitaires $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$.

$\vec{u}_r$ est dans le sens des r croissants. De même pour $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ dans le sens des θ et φ croissants.

Géographie terrestre :

$\vec{u}_r$ est dirigé selon la verticale ascendante du lieu.

$\vec{u}_\theta$ est dirigé vers le sud.

$\vec{u}_\varphi$ est dirigé vers l'est.

θ est appelé la colatitude. φ est la longitude.

$0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

IV.2 Dérivation des vecteurs unitaires

- Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers m.

On a : $\vec{u}_r = \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{u}$ avec $\vec{u} = \cos\varphi\vec{u}_x + \sin\varphi\vec{u}_y$. D'où $\boxed{\vec{u}_r = \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\cos\varphi\vec{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{u}_y}$

- Si on remplace θ par $\theta + \frac{\pi}{2}$, remplace $\vec{u}_r$ par $\vec{u}_\theta$.

On a donc : $\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{k} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi\vec{u}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi\vec{u}_y$, d'où

$\boxed{\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta\cos\varphi\vec{u}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{u}_y}$

- On a : $\vec{u}_\varphi = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_x + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y = -\sin\varphi\vec{u}_x + \cos\varphi\vec{u}_y$

- $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{k} + \dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi\vec{u}_x - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi\vec{u}_y + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\vec{u}_y$

On a donc : $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{u}_\varphi$

IV.3 Vitesse du point *M* et déplacement élémentaire

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}(\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\varphi$$

Interprétation graphique :

- Si θ et φ sont fixés. On fait varier r de dr. Le point M se déplace parallèlement à $\vec{u}_r$ de dr. On retrouve donc : $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\vec{u}_r$.
- Si r et φ sont fixés. On fait varier θ de $\mathrm{d}\theta$. Le point M se déplace parallèlement à $\vec{u}_\theta$ sur le cercle de centre O et de rayon r. Comme la variation d'angle vaut $\mathrm{d}\theta$, le déplacement est donc $r\mathrm{d}\theta$, d'où $\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$
- Si r et θ sont fixés. On fait varier φ de $\mathrm{d}\varphi$. Le point m se déplace parallèlement à $\vec{u}_\varphi$ sur le cercle de centre O et de rayon $Om = r\sin\varphi$. Comme la variation d'angle vaut $\mathrm{d}\varphi$, le déplacement est donc $r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$, d'où $\mathrm{d}\vec{l} = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$

Le déplacement élémentaire vaut : $\mathrm{d}\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$.

Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.

Ces résultats sont à connaître par cœur et peuvent s'en déduire graphiquement.

$\vec{u}_r$ est dans le sens des *r* croissants. De même pour $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ dans le sens des θ et φ croissants.

On en déduit : $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$.

$r = cte$: $\mathrm{d}S_r = (r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)$

$\theta = cte$: $\mathrm{d}S_\theta = (\mathrm{d}r)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)$

$\varphi = cte$: $\mathrm{d}S_\varphi = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les sphères de rayon r et de rayon r + dr.

$$\frac{4}{3}\pi(r+\mathrm{d}r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{3\mathrm{d}r}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

Le volume élémentaire compris entre les sphères de rayon *r* et de rayon *r* + d*r* est la surface de la sphère de rayon *r* multipliée par d*r* : $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$