FILTRES EN RÉGIME NON HARMONIQUE

On se propose de déterminer la réponse d'un filtre à un stimuli (excitation) non sinusoïdal : deux méthodes sont à notre disposition ; soit à partir de l'équation différentielle, soit en utilisant la décomposition spectrale.

I. ANALYSE TEMPORELLE

I.1 Utilisation de l'équation différentielle

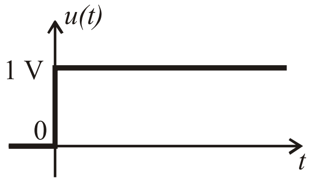
Connaissant la fonction de transfert, on en déduit l'équation différentielle par la transformation formelle $p = j\omega \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. On résout alors l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales : le courant dans une bobine ne peut pas varier de façon discontinue et la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue.

I.2 Paramètres relatifs à la réponse à un échelon

a) Échelon

On appelle échelon unité ou fonction de Heaviside la fonction définie par :

$$\begin{cases} u(t) = 1\ \text{V si } t \geq 0 \\ u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$



b) Réponse indicielle

La **réponse indicielle** d'un système linéaire est le signal de sortie $s_u(t)$ associé à un **échelon unité** en entrée $u(t)$; le **système étant initialement au repos** (conditions initiales nulles pour $t < 0$).

En pratique, si l'entrée est $e(t) = E\,u(t)$, alors la sortie est $s(t) = E\,s_u(t)$ car le système est linéaire.

Rappels de la linéarité : Si on applique $e_1(t)$ à l'entrée, la sortie est $s_1(t)$. Si on applique $e_2(t)$ tout seul, la sortie est $s_2(t)$. Si on applique $e(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$, alors $s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$.

L'observation de la réponse indicielle est fréquemment utilisée pour tester un circuit. On précise alors la valeur finale, le temps de réponse et le dépassement.

c) Valeur finale

Sauf instabilité, la sortie est en équilibre. Si $t \to \infty$, $s \to cte$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \to 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \to 0$. On a alors $p = j\omega \to 0$.

On admet que : $\lim\limits_{t \to \infty} s_u(t) = \lim\limits_{p \to 0} H(p)$

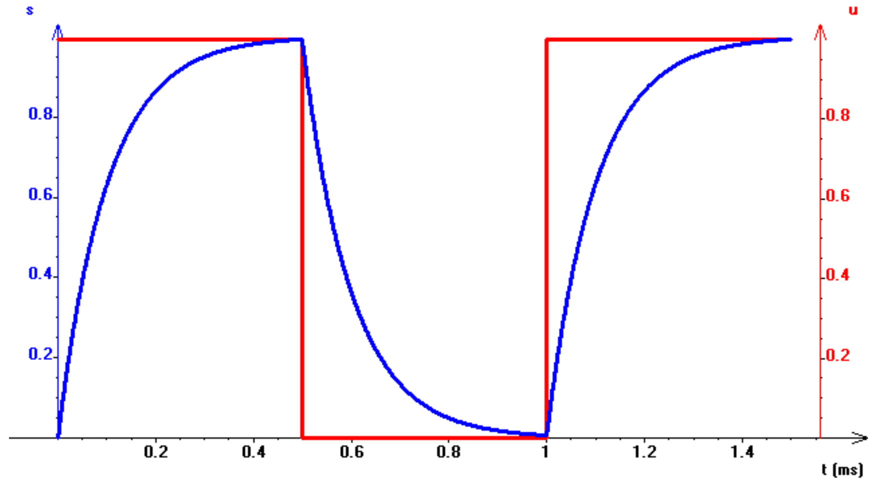
Cette limite est appelée gain statique, appelé également gain à basse fréquence.

Exemple : passe haut du premier ordre : $H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$. Si $t \to \infty$, $s(t) \to 0$.

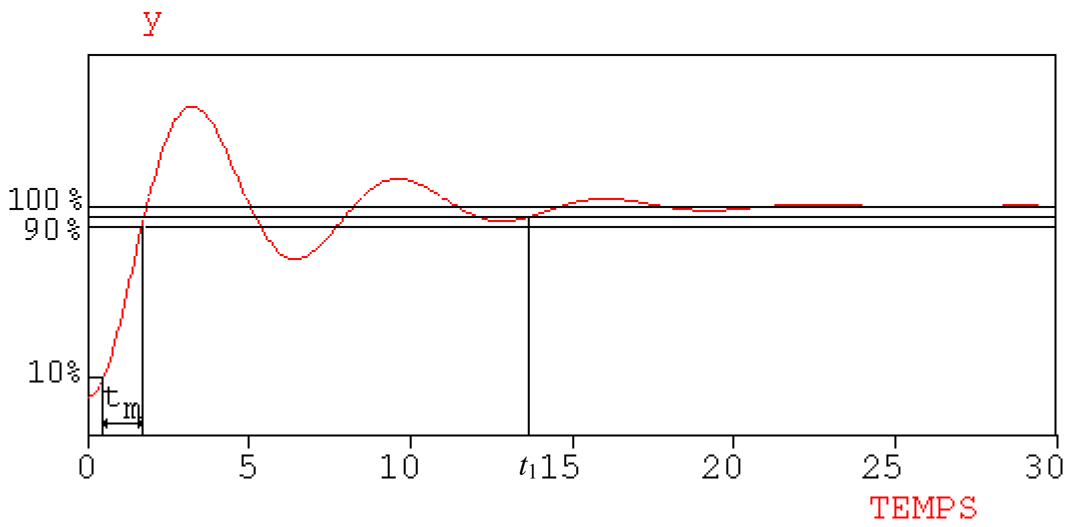
passe bas du premier ordre : $H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$. Si $t \to \infty$, $s(t) \to 1$.

Expérimentalement, on pourra observer la réponse indicielle en appliquant un créneau source de période $T \gg \tau$ (pour le premier ordre, état d'équilibre à chaque créneau) ou $T \gg$ pseudo période pour un deuxième ordre.

Exemple de courbe pour un premier ordre : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\frac{s}{\tau}=\frac{u}{\tau}$ avec $\tau = 0{,}1$ ms . La fréquence de u est 1000 Hz.



d) Temps de réponse à 5%



Le **temps de montée** t_m est l'intervalle de temps séparant les instants auxquels la réponse indicielle vaut 10% et 90% de la valeur finale.

On définit t_1 le temps nécessaire pour que la sortie soit définitivement à $\pm 5\%$ de la valeur finale.

e) Dépassement

Le premier dépassement est défini par : $D=\frac{S_{\max}-S_{\infty}}{S_{\infty}}$

I.3 Cas d'un système du premier ordre

a) Passe-bas du premier ordre

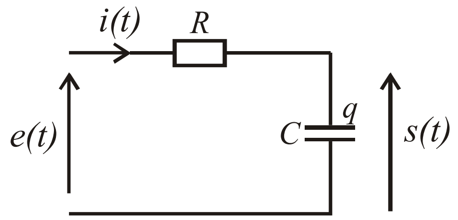
La fonction de transfert est : $\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}=\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. On pose : $\omega_0=\frac{1}{\tau}$ et $p=j\omega$.

On a en variables de Laplace : $H(p)=\frac{s(p)}{e(p)}=\frac{H_0}{1+\tau p}$

On en déduit l'équation différentielle : $s+\tau ps=H_0e$, soit $s+\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=H_0e$. On a donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\frac{s}{\tau}=\frac{H_0}{\tau}e}$$

Exemple : circuit *RC* :



La loi des mailles s'écrit : $e(t)=Ri+s$. Or $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, d'où $e(t)=RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s$.

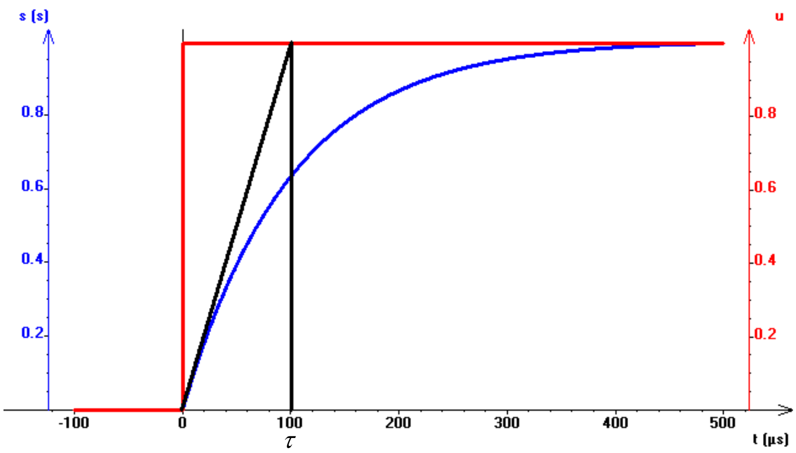
Pour le circuit *RC*, l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\frac{s}{\tau}=\frac{e(t)}{\tau}} \text{ avec } \tau=RC \text{ et } H_0=1$$

On étudie la réponse indicielle du circuit *RC*. On applique donc un échelon unité de tension et le condensateur est initialement déchargé.

La solution s'écrit : $s(t)=1+A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$. Comme la tension aux bornes du condensateur ne peut pas varier de façon discontinue, $s(0)=0=1+A$. On en déduit :

$$s(t)=1\left(1-\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$



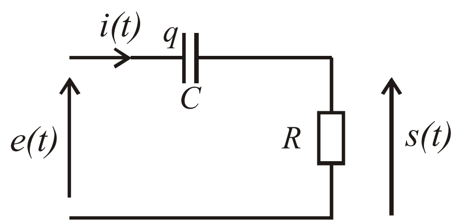
On n'observe pas de dépassement.

Calcul du temps de réponse à 5% : $\left|\frac{s-s_\infty}{s_\infty}\right|=5\%=\frac{5}{100}$, soit $\frac{1-\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)-1}{1}=\frac{5}{100}$, d'où $\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)=\frac{5}{100}$ et $t=-\tau\ln\frac{5}{100}=3\tau$

> Le temps de réponse à 5% près pour un système du premier ordre est 3τ .
> Le temps de réponse à 0,7% près est $5\,\tau$.
> Le temps de réponse à 0,1% près est $7\,\tau$.

b) Passe-haut du premier ordre

Exemple d'un circuit *RC* :



La loi des mailles s'écrit : $e(t)=\frac{q}{C}+s$.

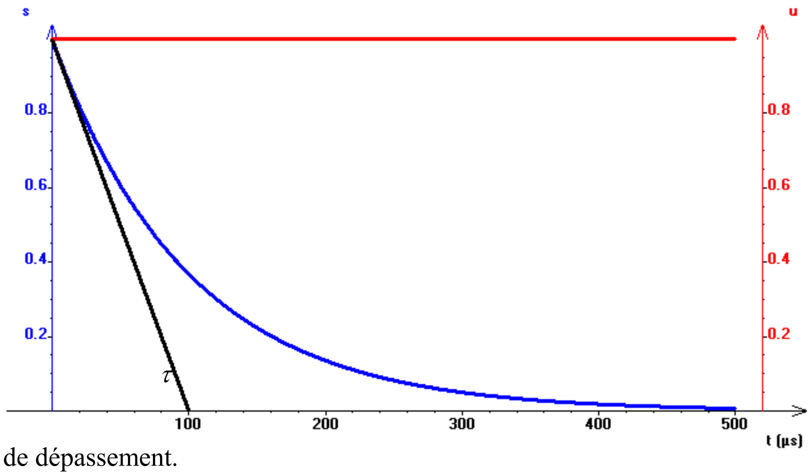
On cherche une équation différentielle en *s*. On remarque que *q* est une primitive de *i* qui est relié à *s*. Il faut donc dériver la loi des mailles.

$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Or $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{R}$. On en déduit : $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{RC} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}} \text{ en posant } \tau = RC$$

On étudie la réponse indicielle du circuit RC. On applique donc un échelon unité de tension et le condensateur est initialement déchargé.

La solution s'écrit : $s(t) = A\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$. Comme la tension aux bornes du condensateur ne peut pas varier de façon discontinue, $s(0) = 1 = A$. On en déduit : $s(t) = 1 \times \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$



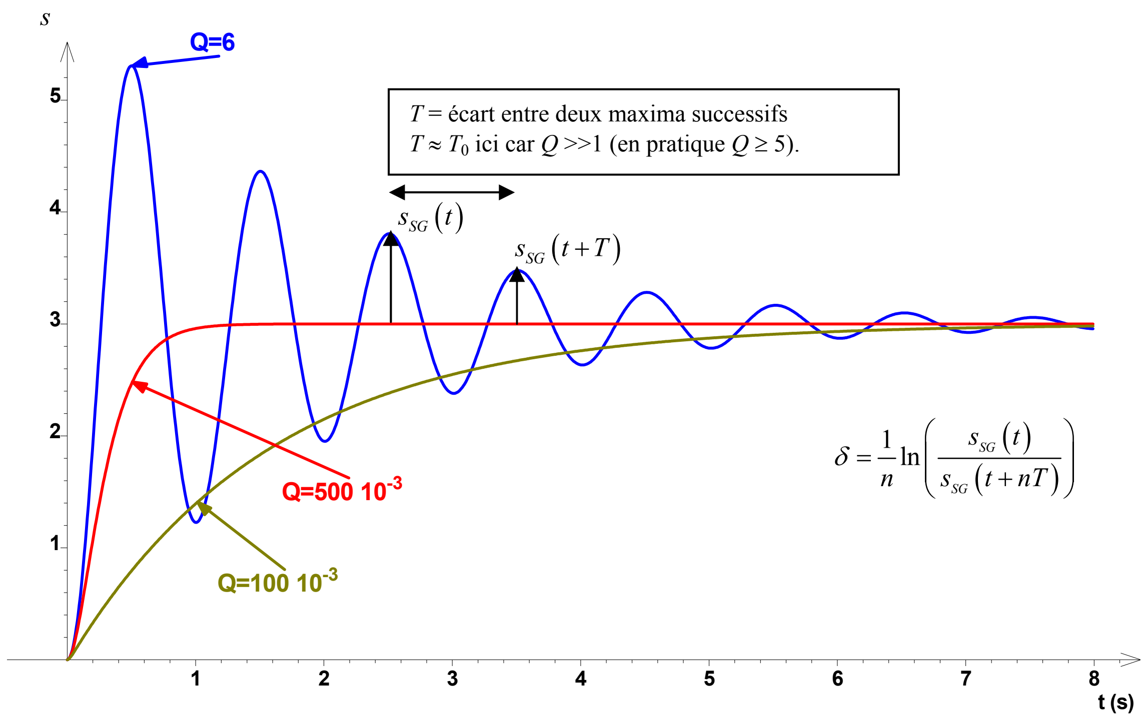
On n'observe pas de dépassement.

Le temps de réponse à 5% près pour un système du premier ordre est 3τ .

I.4 Cas d'un filtre du deuxième ordre

Exemple d'équation différentielle : $\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = e(t)$

On a étudié la résolution de cette équation différentielle dans le chapitre sur les équations différentielles.



II. RÉPONSE À UN SIGNAL DÉTERMINISTE

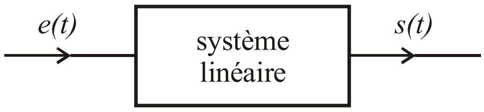
C'est une évolution connue *a priori* par opposition à un signal aléatoire.

Pour étudier la réponse d'un filtre à un signal périodique, il y a deux méthodes :

- **Résolution de l'équation différentielle.**
- **Utilisation de la décomposition en série de Fourier.**

Nous allons développer dans ce chapitre la deuxième méthode.

II.1 Signal d'entrée à deux fréquences



Supposons que $e(t) = E_{m1}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + E_{m2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) = e_1(t) + e_2(t)$. Comme le système est linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition.

On appelle $s_1(t)$ la réponse du système si on applique $e_1(t)$ tout seul.

On appelle $s_2(t)$ la réponse du système si on applique $e_2(t)$ tout seul.

On peut en déduire la sortie $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$.

Si on est capable de décomposer le signal d'entrée d'un filtre[1] (qui est linéaire par définition) en somme de signaux harmoniques, on peut obtenir le signal de sortie.

- Il faut calculer la réponse de chacun des harmoniques[2] du signal d'entrée.
- Il faut ensuite superposer les signaux obtenus.

II.2 Cas d'un signal d'entrée périodique

a) Décomposition en série de Fourier

Quelques applets variés sur la synthèse de Fourier ou la décomposition de Fourier :

http://www.falstad.com/fourier/

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Fourier/fourier1.html

http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/divers/syntfour.html

Soit $e(t)$ une fonction périodique de période T_S, de pulsation $\omega_S = \dfrac{2\pi}{T_S}$, de fréquence $f_S = \dfrac{1}{T_S}$.

La décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_S t + b_n \sin n\omega_S t = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n)\text{, avec } n \text{ entier}$$

- $a_1 \cos\omega_S t + b_1 \sin\omega_S t$: terme fondamental (de même pulsation que le signal)
- $a_n \cos n\omega_S t + b_n \sin n\omega_S t$: terme harmonique de rang n (de pulsation $n\,\omega_S$).

On peut démontrer que : $a_0 = \langle e(t)\rangle = \dfrac{1}{T_S}\displaystyle\int_{-T_S/2}^{T_S/2} e(t)\,\mathrm{d}t$: valeur moyenne de $e(t)$ sur la période T_S,

$$a_n = \frac{2}{T_S}\int_{-T_S/2}^{T_S/2} e(t)\cos n\omega_S t\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad b_n = \frac{2}{T_S}\int_{-T_S/2}^{T_S/2} e(t)\sin n\omega_S t\,\mathrm{d}t$$

- $e(t)$ pair : $e(-t) = e(t) \Rightarrow b_n = 0$ pour tout n
- $e(t)$ impair : $e(-t) = -e(t) \Rightarrow a_0 = 0,\ a_n = 0$ pour tout n

On peut trouver très facilement la relation entre (a_n, b_n) *et* (c_n, φ_n).

$c_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n) = c_n\cos\varphi_n \cos(n\omega_S t) - c_n \sin\varphi_n \sin(n\omega_S t)$. *On peut identifier à* $a_n \cos n\omega_S t + b_n \sin n\omega_S t$.

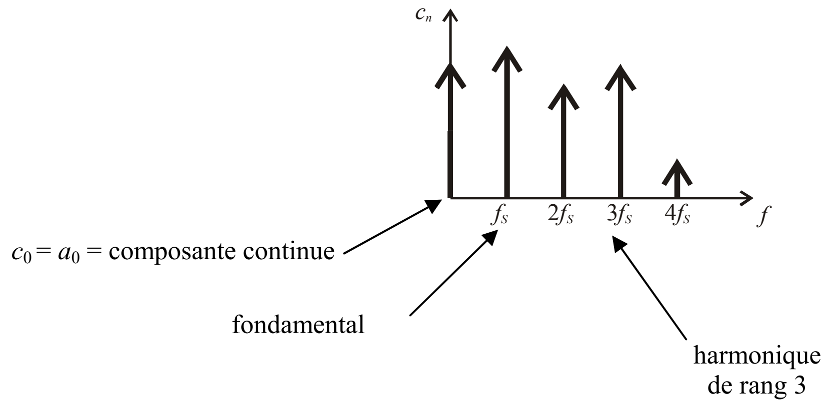
soit : $\begin{cases} a_n = c_n\cos\varphi_n \\ b_n = -c_n\sin\varphi_n \end{cases}$ *et* $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 ; \tan\varphi_n = \dfrac{-b_n}{a_n} ; \cos\varphi_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$.

[1] Voir chapitre sur les filtres pour la définition d'un filtre.

[2] Le nom « harmonique » est un nom masculin.

b) Spectre d'amplitude

L'ensemble des amplitudes c_n constitue le spectre d'amplitude. On le représente en fonction de la fréquence f. Il montre l'amplitude relative des harmoniques et du fondamental.



On représente rarement le spectre de phase car il n'a pas d'interprétation physique simple.

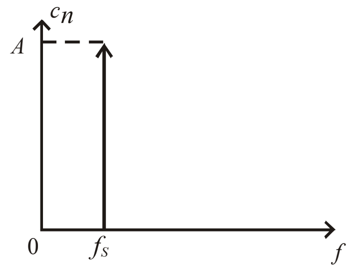
Remarques : On a $e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n)$ que l'on écrira plutôt :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n)$$

avec $E_0 = c_0$ = composante continue ; $\varphi_0 = 0$; si $n > 1$ $E_n = c_n$.

Exemple du signal purement sinusoïdal, d'amplitude A :

$e(t) = A\cos(2\pi f_S t)$



c) Comment calculer la sortie ?

L'entrée du filtre est : $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n)$.

Pour calculer $s(t)$, on cherche la réponse d'un harmonique :

Si on applique $e_n(t) = E_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n)$ seul. La sortie peut se mettre sous la forme : $s_n(t) = S_n \cos(n\omega_S t + \varphi'_n)$.

On est ramené à l'étude du régime sinusoïdal forcé :

$$\begin{cases} e_n(t) = E_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n) \\ \underline{E_n} = E_n \exp(j\varphi_n) \end{cases} \rightarrow \underline{S_n} = \underline{H_n}\,\underline{E_n} = G_n \exp(j\theta_n) E_n \exp(j\varphi_n) = G_n E_n \exp(j(\theta_n + \varphi_n))$$

Appliquer la fonction de transfert à un signal sinusoïdal revient à multiplier l'amplitude par le gain et à rajouter à la phase l'argument de la fonction de transfert.

$$s_n(t) = G_n E_n \cos(n\omega_S t + \varphi_n + \theta_n)$$

On applique la fonction de transfert à chaque composante spectrale et même pour le **continu qui est un cas particulier du régime sinusoïdal forcé avec n = 0 et** $\omega = n\omega_S = 0$.

On décompose le signal d'entrée en une somme de signaux harmoniques. Le signal de sortie s'obtient en calculant la réponse de chacun des harmoniques du signal d'entrée et en superposant les signaux obtenus.

Si l'entrée du filtre est : $e(t)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\cos\left(n\omega_S t+\varphi_n\right)$ **.**

La sortie du filtre est : $s\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_nE_n\cos\left(n\omega_S t+\varphi_n+\theta_n\right)$

Remarque : on a le même résultat si on remplace cos par sin.

Si l'entrée du filtre est : $e(t)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\sin\left(n\omega_S t+\varphi_n\right)$ **.**

La sortie du filtre est : $s_n\left(t\right)=G_nE_n\sin\left(n\omega_S t+\varphi_n+\theta_n\right)$

ATTENTION : On ne peut pas appliquer la fonction de transfert à $e(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\omega_S t+\varphi_n\right)$ **car *e* n'est pas sinusoïdal par contre on peut l'appliquer à une composante spectrale ou à c_0.**

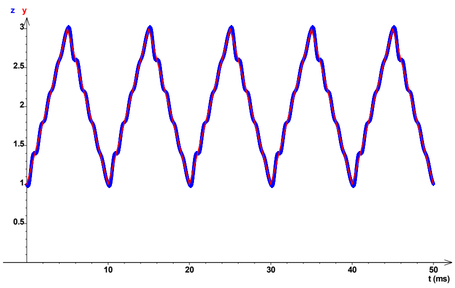
III. EFFET D'UN PASSE-BAS SUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Le filtre passe-bain de gain unité à basse fréquence est attaqué par un signal triangulaire à 3 fréquences différentes : $f_S \ll f_c$, $f_S \approx f_c$ et $f_S \gg f_c$.

Dans tous les cas, la composante continue du signal est transmise sans atténuation (amplification unité) ni discontinuité (les harmoniques de rang élevé ne sont pas transmis).

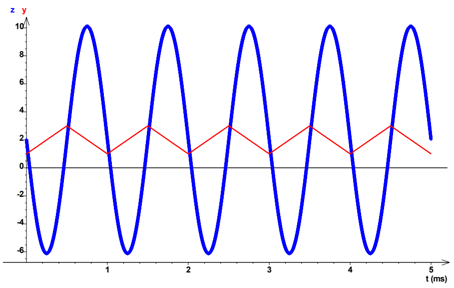
- Si $f_S \ll f_c$. **Le signal de sortie est voisin du signal d'entrée**. On a une transmission de la composante continue et de la plupart des harmoniques. Toutefois, le signal de sortie correspondant au signal carré est plus déformé que le signal de sortie relatif à l'attaque par un signal triangulaire : on a une décroissante en $\frac{1}{n^2}$ des harmoniques au lieu de $\frac{1}{n}$ pour le signal carré et donc une importance relative des harmoniques de rang élevé plus grande pour le signal carré.

  La déformation est plus sensible avec un filtre du 2ème ordre du fait d'une atténuation plus grande en haute fréquence.



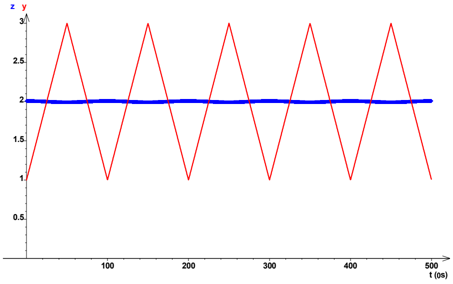
Programme Regressi : triangle de fréquence 100 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(100,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10³
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,1/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

- Si $f_S \approx f_c$, **le signal de sortie est fortement déformé**. La composante continue est transmise sans atténuation. Le fondamental et quelques harmoniques sont transmis avec atténuation.



Programme Regressi : triangle de fréquence 1000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(1000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10³
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,1/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

- Si $f_S \gg f_c$, **seule la composante continue est transmise sans atténuation**. Le fondamental et les harmoniques sont fortement atténués (pratiquement éliminés avec un filtre du deuxième ordre).



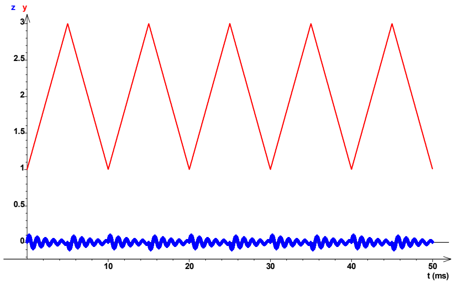
Programme Regressi : triangle de fréquence 10000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(10000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10³
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,1/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

IV. EFFET D'UN PASSE-HAUT SUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Le filtre passe-haut de gain unité à haute fréquence est attaqué par un signal triangulaire à 3 fréquences différentes : $f_S \ll f_c$, $f_S \approx f_c$ et $f_S \gg f_c$.

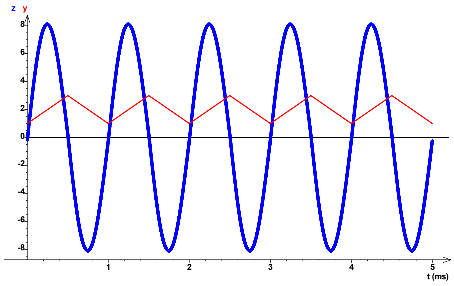
Un filtre passe-haut élimine la composante continue dans tous les cas.

- Si $f_S \ll f_c$. **Seuls les harmoniques de rang élevé sont transmis et le signal de sortie est très faible et déformé**.



Programme Regressi : triangle de fréquence 100 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(100,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10³
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,-f^2/f0^2/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

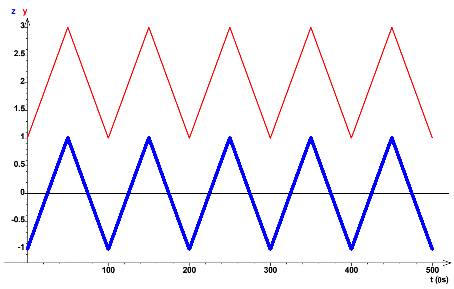
- Si $f_S \approx f_c$, **le signal de sortie est déformé** : absence de composante continue et atténuation du fondamental.



Programme Regressi : triangle de fréquence 1000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(1000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10³
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,-f^2/f0^2/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

- $f_S \gg f_c$, **le signal de sortie est peu déformé, seule la composante continue est éliminée**.

  Remarque : en mode AC (alternative current), l'oscilloscope est muni d'un filtre passe-haut du 1^er ordre (fréquence de coupure égale à environ 10 Hz) ; pour ne pas être déformé dans ce mode, le signal appliqué doit être de fréquence supérieure à 100 Hz.



Programme Regressi : triangle de fréquence 10000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(10000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10³
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,-f^2/f0^2/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

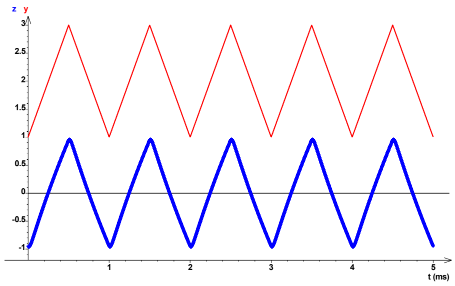
V. EFFET D'UN PASSE-BANDE SUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Le filtre passe-bande de gain maximum (fréquence f_0) est attaqué par un signal triangulaire à 3 fréquences différentes : $f_S \ll f_B$, $f_S \approx f_0$ et $f_S \gg f_H$ avec $f_H - f_B = \Delta f = \dfrac{f_0}{Q}$.

Dans tous les cas, sa composante continue est éliminée.

V.1 Q = 0,1 – bande passante large – filtre peu sélectif – résonance floue

- Si $f_S \ll f_B$, la composante continue est éliminée, le signal de sortie est très faible.
- Si $f_S \approx f_0$, **le signal de sortie est « voisin » du signal d'entrée**.



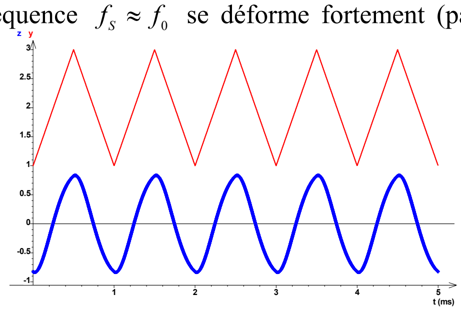
Programme Regressi : triangle de fréquence 1000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(1000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10^3
Q=0.1 -> Q=100 10^{a3}
z=filtre(y,j/Q*f/f0/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

- Si $f_S \gg f_H$, le signal de sortie est très faible. Il reste quelques harmoniques de rang élevé fortement atténués.

V.2 Q = 1

Les signaux de fréquence $f_S \ll f_B$ et $f_S \gg f_H$ sont fortement atténués.

Le signal de fréquence $f_S \approx f_0$ se déforme fortement (pas de composante continue et harmoniques très fortement éliminés).

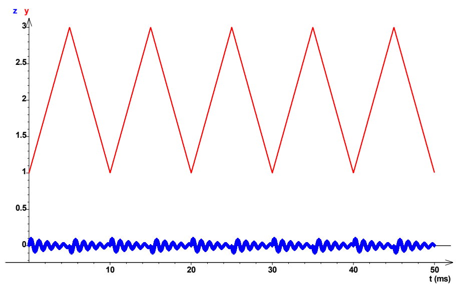


Programme Regressi : triangle de fréquence 1000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(1000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10^3
Q=1 -> Q=1
z=filtre(y,j/Q*f/f0/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))

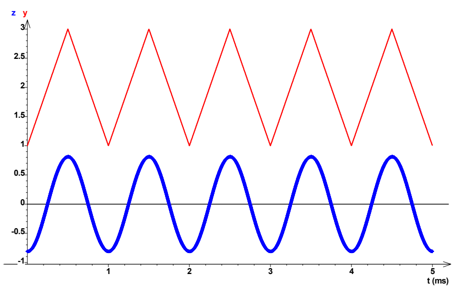
V.3 Q = 10 – bande passante étroite – filtre très sélectif – résonance aigüe

Les signaux de fréquence $f_S \ll f_B$ et $f_S \gg f_H$ sont très fortement atténués.

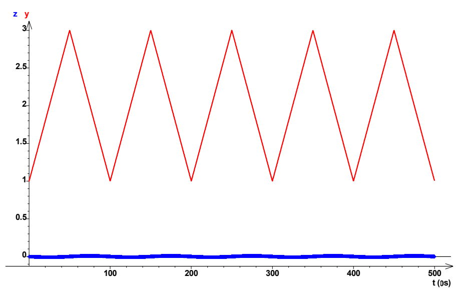
Si $f_S \approx f_0$, seul le fondamental passe. **La sortie est pratiquement sinusoïdale**.



Programme Regressi : triangle de fréquence 100 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(100,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10^3
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,-f^2/f0^2/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))



Programme Regressi : triangle de fréquence 1000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(1000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10^3
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,j/Q*f/f0/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))



Programme Regressi : triangle de fréquence 10000 Hz – filtre de fréquence propre 1000 Hz.
y=triangle(10000,0.5)+2
f0=1000 -> f0=1 10^3
Q=10 -> Q=10
z=filtre(y,j/Q*f/f0/(1-f^2/f0^2+j/Q*f/f0))