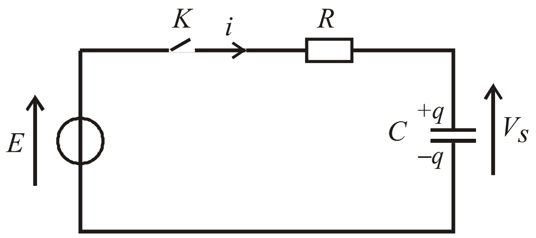
DIPÔLES *RC*, *RL*, *RLC* EN RÉGIME VARIABLE
BILAN ÉNERGÉTIQUE

I. RÉPONSE À UN ÉCHELON DE TENSION POUR UN CIRCUIT *RC*

I.1 Obtention de l'équation différentielle en tension aux bornes du condensateur

Considérons le circuit suivant.



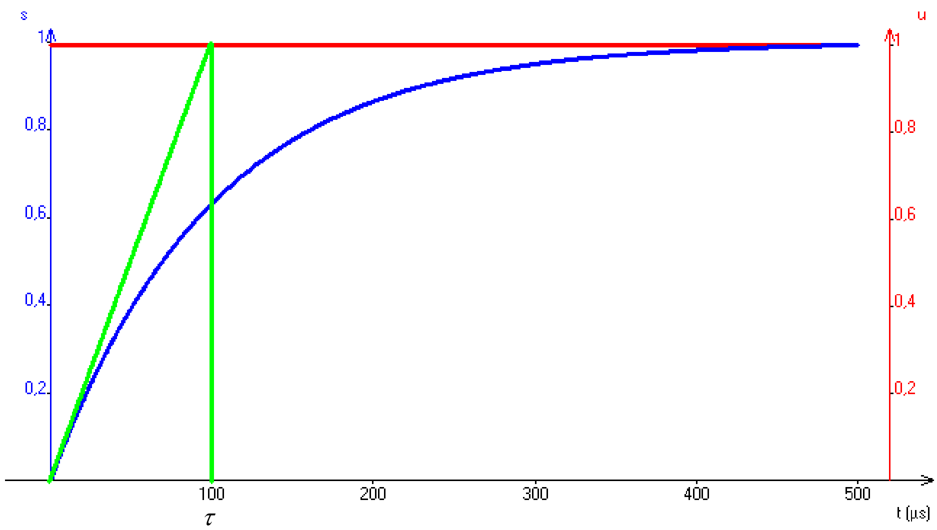
- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert, le condensateur est déchargé ($V_s = 0$).
- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé. E désigne la f.e.m. d'un générateur de tension continue.

L'orientation de i est arbitraire, de même le choix de l'armature positive du condensateur. Une fois ces choix faits, on peut écrire l'équation différentielle :

I.2 Méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires avec un second membre

Attention : cette méthode ne s'applique que pour les équations différentielles linéaires.

I.3 Représentation graphique de Vs(t) et i(t)



Interprétation physique de τ :

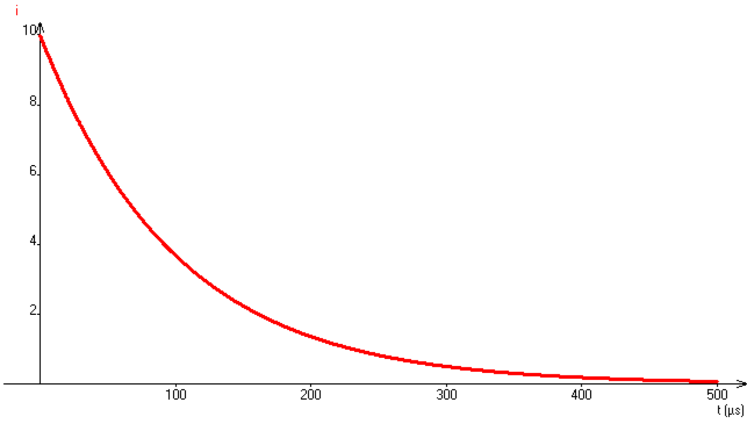
- τ est une **constante de temps**. Le circuit ne réagit pas instantanément à un échelon de tension. On peut considérer que le régime forcé ($V_S = E$) est atteint au bout de 5τ (le régime libre est négligeable puisque $e^{-5} = 0{,}7\times10^{-2} << 1$).
- La **tangente à l'origine coupe l'asymptote** $V_S = E$ pour $t = \tau$.

Définition du temps de réponse à 5% : c'est le temps nécessaire pour que la sortie soit définitivement à $\pm5\%$ de la valeur finale. On résout : $\left|\dfrac{V_S - V_{S\infty}}{V_{S\infty}}\right| \le 5\%$. On trouve $t = 3\tau$

Au bout de 3τ, la sortie est égale à la valeur finale à 5% près.
Au bout de 5τ, la sortie est égale à la valeur finale à 0,7% près.

L'intensité i vaut :

$$i = C\frac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t} = \frac{CE}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

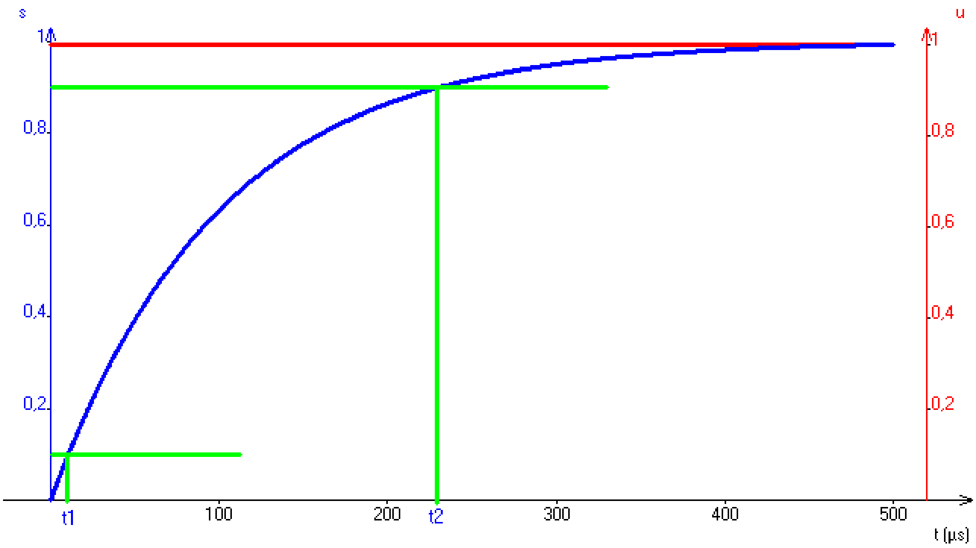


I.4 Temps de montée du circuit

On définit t_1 tel que $V_S(t_1) = \dfrac{E}{10}$

et t_2 tel que $V_S(t_1) = \dfrac{9E}{10}$

Par définition, le temps de montée vaut : $t_m = t_2 - t_1$ **.**



- $\dfrac{E}{10} = E\left(1-\exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)\right)$, d'où $\dfrac{9}{10} = \exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)$ et $t_1 = -\tau\ln\dfrac{9}{10}$
- $\dfrac{9E}{10} = E\left(1-\exp\left(-\dfrac{t_2}{\tau}\right)\right)$, d'où $\dfrac{1}{10} = \exp\left(-\dfrac{t_2}{\tau}\right)$ et $t_2 = -\tau\ln\dfrac{1}{10}$

On en déduit : $t_m = t_2 - t_1 = \tau\ln 9 = 2{,}2\tau$

On l'utilisera en TP pour une détermination précise de la constante de temps.

Remarque : on peut définir aussi un temps de descente, c'est le temps que met le signal pour passer de 90% de l'asymptote à 10% de l'asymptote.

I.5 Bilan énergétique

Il s'obtient en multipliant l'équation différentielle par *i* pour faire apparaître des termes de puissance.

En mécanique, l'analogue de i est la vitesse v. On procédera de même pour faire le bilan énergétique et faire apparaître l'énergie cinétique et l'énergie potentielle à partir du principe fondamental de la dynamique.

On vérifie que $\boxed{W_g = W_C + W_J}$. Cette relation traduit la conservation de l'énergie.

Cas particulier : Si $t_0 \to \infty$, $W_C \to \frac{1}{2}CE^2$ et $W_g \to CE^2$.

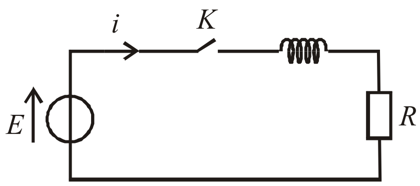
L'énergie fournie par le générateur a contribué pour moitié à accroître l'énergie emmagasinée dans le condensateur. Le reste a été absorbé dans la résistance (ou dissipé par effet Joule). Le rendement énergétique de l'opération est toujours de 50%, quelles que soient les valeurs de *R* et *C* !!!

Remarques : La dissipation d'énergie est inévitable dans ce processus. La charge du condensateur est une opération irréversible ; la réversibilité exigerait qu'à chaque instant le générateur ajuste sa tension à la ddp aux bornes de C pour avoir en permanence une situation voisine de l'équilibre caractérisée par i voisin de 0.

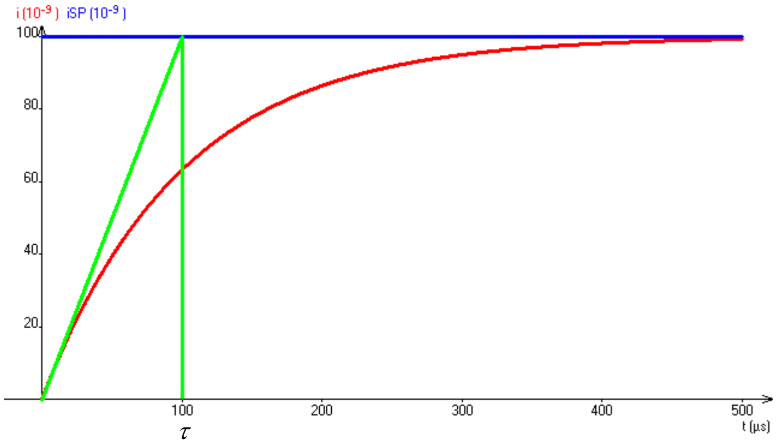
II. CIRCUIT *RL* EN RÉGIME TRANSITOIRE

II.1 Expression de i(t)

- Si $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert.
- Si $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé.



À $t = 0^+$, $i = 0$ car l'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine.



II.2 Bilan énergétique

On multiplie la loi des mailles par i pour faire apparaître des termes de puissance : $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$.

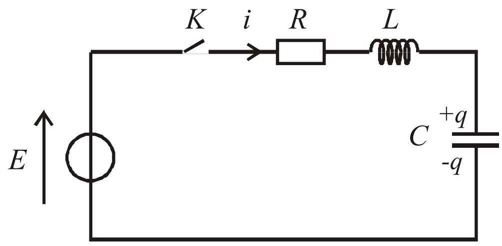
D'où $Ei = Ri^2 + L\dfrac{di}{dt}i$, soit $\boxed{Ei = Ri^2 + \dfrac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}}$

La puissance fournie par le générateur est égale à la puissance perdue par effet Joule dans la résistance + la puissance reçue par la bobine.
Ne pas oublier que Ri^2 est une puissance reçue par la résistance qui est dissipée par effet Joule.

III. CIRCUIT RLC SÉRIE

III.1 Équation différentielle

Considérons le circuit suivant :



- Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et le condensateur est chargé ($q = q_0$).
- Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé. E désigne la f.e.m. d'un générateur de tension continue.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Avant de la résoudre, il est souhaitable de la mettre sous forme canonique et faire apparaître des grandeurs qui ont un sens physique :

III.2 Formes canoniques

On rencontre trois formes canoniques :

1ère forme avec le facteur de qualité (la plus utilisée en physique) : $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \text{second membre}}$

Q : facteur de qualité ; ω_0 : pulsation propre ($\omega_0 > 0$)

2ème forme canonique avec le coefficient d'amortissement (utilisée en SI) : $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + 2\sigma\omega_0\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \text{second membre}}$

σ : coefficient d'amortissement. On a $Q = \dfrac{1}{2\sigma}$

3ème forme canonique avec le temps de relaxation : $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \text{second membre}}$

τ : temps de relaxation.

En divisant l'équation (1) par L, on obtient : $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{LC} = \dfrac{E}{L}$

III.3 Identification avec le facteur de qualité

Retenir les **formes canoniques** et les valeurs de ω_0 et de Q pour le **RLC série** : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \;;\; Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$

Ces relations sont à redémontrer très rapidement dans les exercices.

III.4 Régime libre et régime permanent

L'équation différentielle se résout en 4 étapes :

$q = q_{SG} + q_{SP}$

q_{SG} : solution générale de l'équation homogène (régime libre ou régime permanent).

q_{SP} : solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (régime forcé). Ici le second membre est constant, on cherche q_{SP} sous la forme d'une constante. On obtient $q_{SP} = CE$.

III.5 Résolution de l'équation différentielle dans le cas où E = 0 – Étude du régime libre

Dans ce paragraphe, on se place dans le cas particulier où $E = 0$. Il n'y a pas d'excitation extérieure. On a alors $q_{SP} = 0$ et $q = q_{SG}$. L'équation différentielle est : $\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0$. L'équation caractéristique est : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^{\ 2} = 0$

Le discriminant vaut : $\Delta = 4\omega_0^{\ 2}\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$. Il y a trois cas selon le signe du discriminant :

a) Q < ½ ; Δ > 0 : régime apériodique

On a deux racines réelles et négatives :

Les racines sont bien négatives puisque et $\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} < \sqrt{\frac{1}{4Q^2}} = \frac{1}{2Q}$

On a donc :

$$q_{SG}(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t).$$

On a un régime apériodique, q_1 passe au plus une fois par 0 et $\lim_{t\to\infty} q_{SG}(t) = 0$.

b) Q = ½ ; Δ = 0 : régime critique

On a une racine double

$$q_1(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t)$$

On a un régime critique, Q = ½ et le retour à l'équilibre est le plus rapide.

c) Q > ½ ; Δ < 0 : régime pseudo périodique amorti

On a 2 racines complexes :.

La solution est donc : $q_{SG}(t) = \exp(\text{terme réel} \times t)\left[Q_m \cos(\text{terme imaginaire} \times \text{t} + \varphi)\right]$.

$$q_{SG}(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[Q_m \cos(\omega \text{t} + \varphi)\right]$$

ou

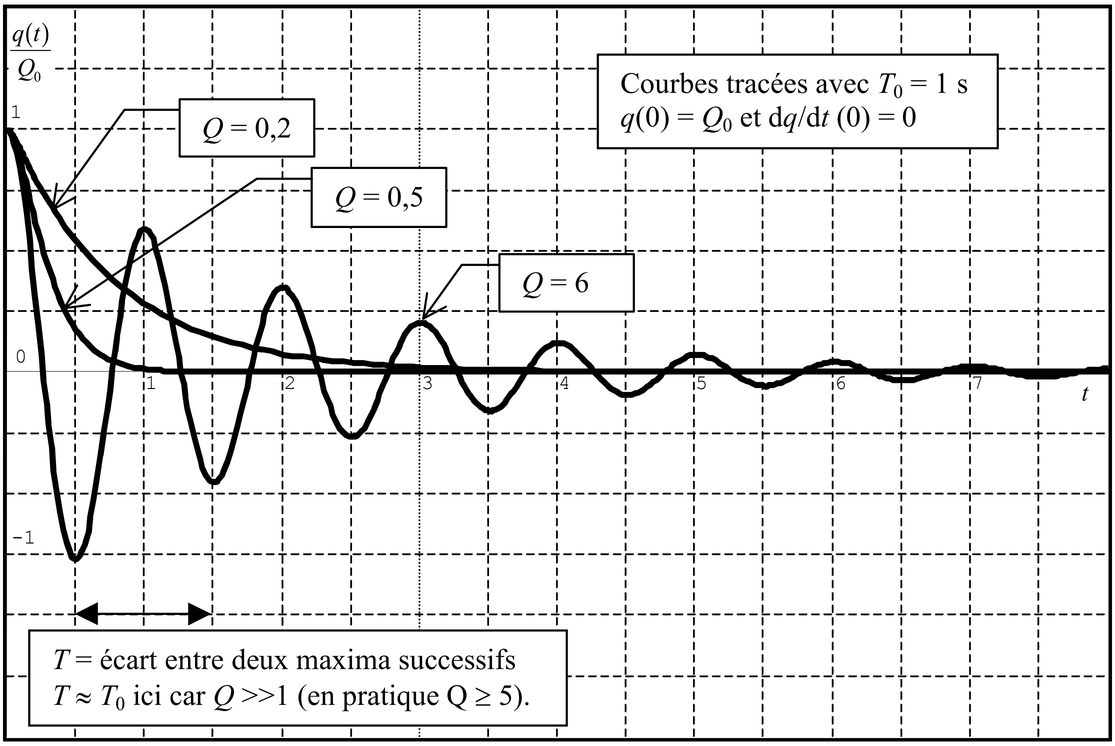
$$q_{SG}(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\omega \text{t}) + B\sin(\omega t)\right]$$

Les calculs sont plus simples avec la deuxième expression si on connaît les conditions initiales : $q(0)$ et $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0)$.

Il y a dans les deux cas **deux constantes** à déterminer puisqu'on a une **équation différentielle du second ordre**.
Pour passer de $\{A, B\}$ à $\{Q_m, \varphi\}$, il suffit de développer $Q_m \cos(\omega \text{t} + \varphi) = Q_m \cos\omega t \cos\varphi - Q_m \sin\omega t \sin\varphi$:

$$\begin{cases} A = Q_m \cos\varphi \\ B = -Q_m \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow Q_m = \sqrt{A^2 + B^2},\ \tan\varphi = -\frac{B}{A},\ \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

d) Représentation graphique de $q(t) = q_{SG}$ ($q_{SP} = 0$)



Si $Q > 0{,}5$:

- On a une enveloppe en $\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$. τ joue bien le rôle d'un **temps de relaxation** puisqu'au bout de quelques τ, le **régime libre devient négligeable** et on aboutit à l'état d'équilibre (ici $q(\infty) = q_{SG}(\infty) = 0$).
  Si la résistance R est faible, Q et τ sont grands, le circuit RLC est peu amorti. Interprétation physique : il y a peu de pertes par effet Joule.
- On a un régime **pseudo périodique amorti** de **pseudo période *T*** :
  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. $\boxed{\text{Si } Q >> 1 \text{ (en pratique } Q \geq 5\text{), alors}^1\ \omega \approx \omega_0 \Rightarrow T \approx T_0}$ (voir courbe)
- On peut avoir un **ordre de grandeur du facteur de qualité** en comptant le nombre de maxima d'amplitude non négligeable. La courbe représentée ci-dessus a environ 6 maxima.
  La détermination expérimentale du facteur de qualité se fait à partir du décrément logarithmique.

[1] Cela revient à faire un développement limité. Si $Q \geq 5$, on a néglige $1/(4Q^2) = 1/200$ devant 1.

- Le **décrément logarithmique** vaut : $\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{q_{SG}(t)}{q_{SG}(t+nT)}\right)}$ avec n entier.

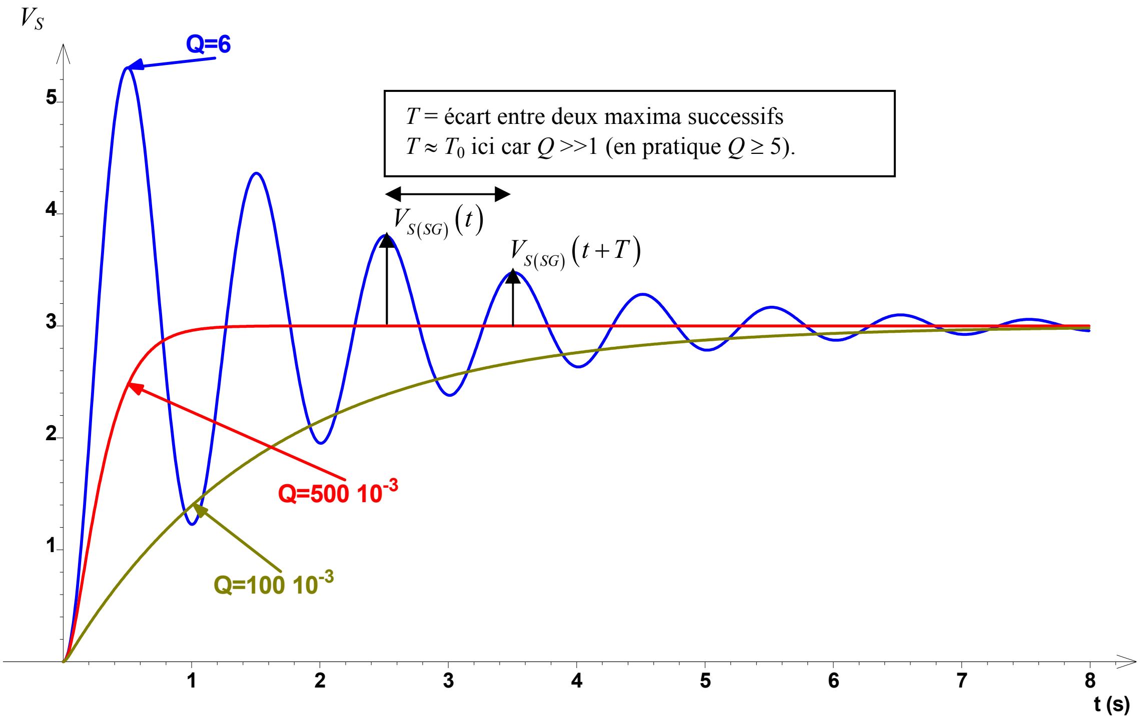
Si $Q \gg 1$ (en pratique $Q \geq 5$), on a $\delta = \frac{\pi}{Q}$. Cette relation sera utilisée en TP.

Le décrément logarithmique permet une détermination expérimentale du facteur de qualité. Il suffit de repérer les maxima relatifs et d'en déduire δ. On peut alors remonter au facteur de qualité.

ATTENTION : le décrément logarithmique est défini pour le régime libre.

III.6 Exemple de résolution avec un second membre constant.

On étudie l'équation différentielle suivante : $\ddot{V}_S + \frac{\omega_0}{Q}\dot{V}_S + \omega_0^2 V_S = \omega_0^2 E$ avec les conditions initiales $V_S(0) = 0$ et $\dot{V}_S(0) = 0$ et $T_0 = 1$ s.



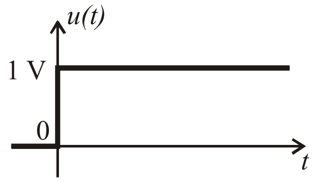
Exploitation de la courbe correspondant au régime pseudo périodique amorti :

IV. RÉPONSE INDICIELLE

IV.1Échelon

On appelle échelon unité ou fonction de Heaviside la fonction définie par :

$$\begin{cases} u(t) = 1 \text{ V si } t \geq 0 \\ u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$



IV.2 Réponse indicielle

La **réponse indicielle** d'un système linéaire est le signal de sortie $s_u(t)$ associé à un **échelon unité** en entrée $u(t)$; le **système étant initialement au repos** (conditions initiales nulles pour $t < 0$).

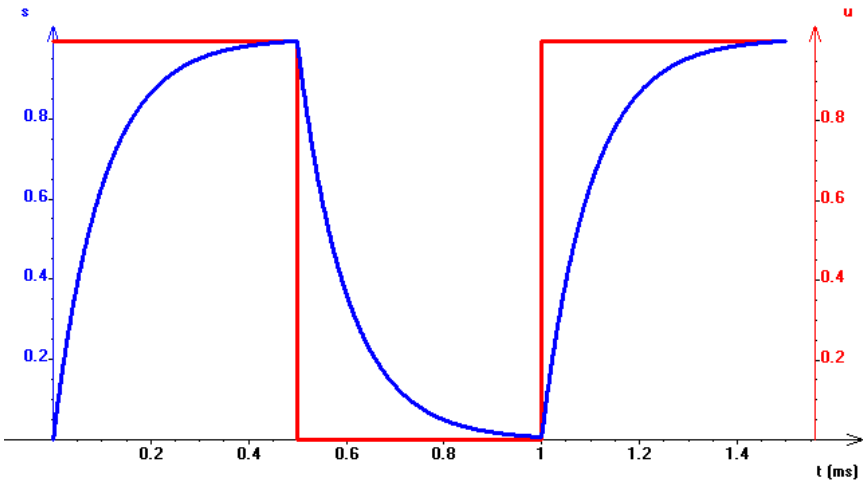
En pratique, si l'entrée est $e(t) = E\,u(t)$, alors la sortie est $s(t) = E\,s_u(t)$ car le système est linéaire.

Rappels de la linéarité : Si on applique $e_1(t)$ à l'entrée, la sortie est $s_1(t)$. Si on applique $e_2(t)$ tout seul, la sortie est $s_2(t)$. Si on applique $e(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$, alors $s(t) = \alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$.

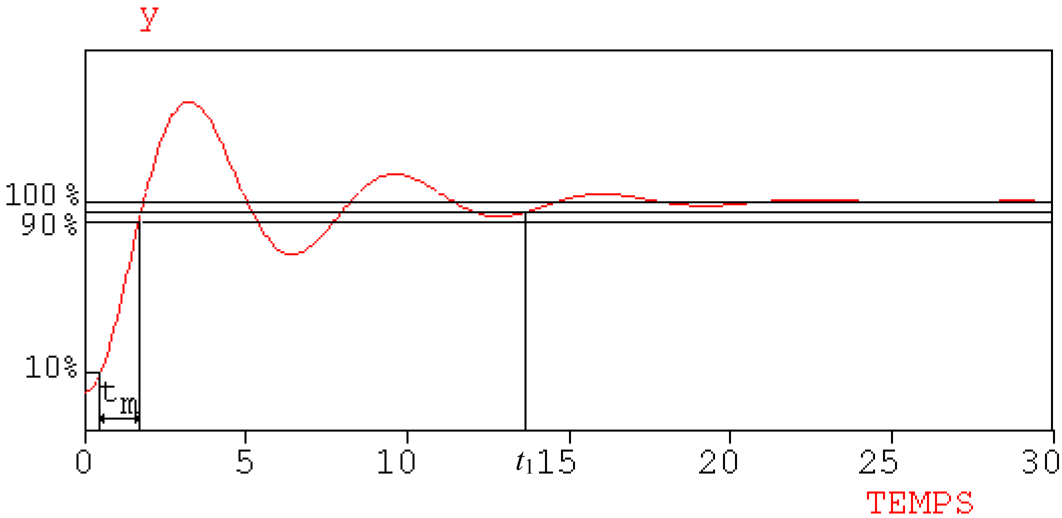
L'observation de la réponse indicielle est fréquemment utilisée pour tester un circuit. On précise alors la valeur finale, le temps de réponse et le dépassement.

Expérimentalement, on pourra observer la réponse indicielle en appliquant un créneau source de période $T \gg \tau$ (pour le premier ordre, état d'équilibre à chaque créneau) ou $T \gg$ pseudo période pour un deuxième ordre.

Exemple de courbe pour un premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{u}{\tau}$ avec $\tau = 0{,}1$ ms . La fréquence de u est 1000 Hz.



IV.3 Temps de réponse à 5%



Le **temps de montée** t_m est l'intervalle de temps séparant les instants auxquels la réponse indicielle vaut 10% et 90% de la valeur finale.

On définit t_1 le temps nécessaire pour que la sortie soit définitivement à $\pm 5\%$ de la valeur finale.

V. STABILITÉ ET RÉGIME FORCÉ

Si les coefficients de l'équation différentielle homogène ont le même signe ($Q > 0$), alors le régime libre devient négligeable au bout de 5τ. Pour t compris entre 0 et quelques τ, on dit que l'on est en **régime transitoire**. Il faut retenir que la **stabilité** d'un système du premier ou second ordre est assurée dès que **les coefficients de l'équation différentielle homogène ont tous le même signe**, sinon on a un régime divergent.

Très rapidement, il ne reste donc que le régime forcé ou régime permanent. Dans de très nombreux exercices (fonction de transfert, décomposition en série de Fourier…), on ne s'intéresse qu'au régime forcé. Si l'excitation est sinusoïdale, on parle de régime sinusoïdal forcé.

Dans certains exercices, on vérifiera la stabilité du système en étudiant les signes de l'équation différentielle homogène.

Cette vérification permet de **détecter des erreurs de signe** dans les équations différentielles. On rencontrera cependant des équations différentielles avec des signes différents.

- Si le montage comporte un amplificateur opérationnel, il y aura une saturation en tension de l'amplificateur opérationnel.
- Ce cas peut être recherché pour avoir des oscillateurs.

VI. MÉTHODE DE MISE EN ÉQUATION

VI.1 Méthode de mise en équation

☞ MISE EN EQUATION : Pour un circuit série, écrire la **loi des mailles**. Pour un circuit comportant plusieurs nœuds, compter le nombre de nœuds (n). Il y a (n – 1) nœuds indépendants. Choisir un nœud de référence appelé la **masse**. Ecrire (n – 1) fois la **loi des nœuds en termes de potentiel**. Remarque : si entre deux nœuds A et B, il y a un générateur de tension de fem E, alors une des équations s'écrira directement $V_A - V_B = E$.

☞ **NOUVEAUTE POUR LA MISE EN EQUATION : par rapport à la mise en équation en continu, il faudra parfois dériver la loi des nœuds ou la loi des mailles.**

☞ DETERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATION. Traduire d'abord que la **tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue**, et que dans une bobine, **l'intensité ne peut varier de façon discontinue**. Utiliser les équations utilisées dans la mise en équation pour la détermination des constantes d'intégration.

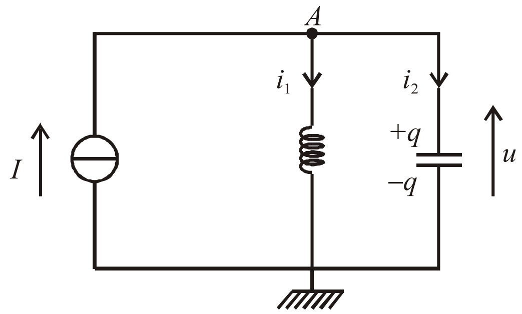
☞ Vérifier **l'homogénéité des relations** et les **cas limites** : t = 0 et t infini (on peut souvent trouver le résultat sans calcul à partir du schéma). Le **système est stable** si les coefficients de l'équation homogène **sont de même signe** (en pratique positifs) pour les équations différentielles linéaires du premier et second ordre à coefficients constants. Le régime libre tend alors vers 0. Vous devez effectuer ces trois vérifications dans les exercices et ainsi détecter des erreurs… Il faut faire preuve de sens physique…

☞ Erreurs fréquemment commises :

- Établir l'équation différentielle à un instant t quelconque et non pas à t =0, erreurs de non homogénéité, allure des courbes pour les circuits du premier ordre (tangente à l'origine, asymptote) et deuxième ordre.
- Attention à l'origine des temps : c'est très souvent t = 0 mais parfois on a une condition à $t = t_2$.
- L'énoncé demande parfois **d'intégrer une équation différentielle** : il suffit en fait de la **résoudre** !!!
- Attention aux erreurs de signes pour les deux relations concernant les condensateurs.

VI.2 Exemple

Considérons le circuit suivant. À t = 0, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert.



a) Mise en équation

b) Forme canonique

c)Détermination des constantes d'intégration

- condensateur : la tension ne peut pas varier de façon discontinue aux bornes d'un condensateur, donc $u(0) = 0$, donc $\boxed{A = 0}$
- bobine : l'intensité ne peut pas varier de façon discontinue, donc $i_1(0) = 0$. La difficulté vient que l'on n'a pas directement $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$. Il suffit d'utiliser la loi des mailles écrite précédemment à t = 0 :