DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET ÉQUIVALENTS

I. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

I.1 Développement limité de Taylor-Young

Une fonction f qui admet n dérivées successives en $x = 0$ peut se développer jusqu'à l'ordre n au voisinage de 0.

Si $x \ll 1$, $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On remarque que $x^n \varepsilon(x)$ tend plus vite vers 0 que x^n.

Dans le cours de mathématiques, il y a plusieurs façons d'exprimer le reste. En physique, on ne l'écrit pas.

Si $x \ll 1$, $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$

I.2 Développements limités usuels

Dans tout ce qui suit, on suppose que $x \ll 1$. Les angles sont exprimés en radians.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$ **(il n'y a pas de factorielle dans cette expression)**

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3}$$

I.3 Applications

- Si on fait un développement limité (DL) à l'ordre 1, alors on doit négliger tous les termes d'ordre > 1.
  On écrira alors : $\sin(x) = x$; $\cos(x) = 1$; $\tan x = x$

- Si on fait un développement limité (DL) à l'ordre 1, alors on doit négliger tous les termes d'ordre > 2.
  On écrira alors : $\sin(x) = x$; $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$; $\tan x = x$

II. NOTIONS DE FONCTIONS ÉQUIVALENTES

II.1 Définitions

f et g sont équivalents en a si et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On écrit $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$

II.2 Premières propriétés

L'équivalent d'un produit est le produit des équivalents.

L'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.

Attention : il est faux d'écrire que l'équivalent d'une somme est la somme des équivalents.

II.3 Équivalents des fonctions polynômes en 0 et à l'infini

Soit P_1 une fonction polynôme : $P_1(x) = x + x^2 - 4x^3$

$P_1(x) = x\left(1 + \frac{x^2}{x} - \frac{4x^3}{x}\right)$**. On a donc** $P_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

$P_1(x) = -4x^3\left(\frac{x}{-4x^3} + \frac{x^2}{-4x^3} + 1\right)$**. On a donc** $P_1(x) \underset{x\to \infty}{\sim} -4x^3$

Soit P_2 une fonction polynôme : $P_1(x) = -3x^{-3} + x^{-2} + 3 + x + x^2 - 4x^5$

$P_2(x) \underset{x\to 0}{\sim} -3x^{-3}$ **et** $P_2(x) \underset{x\to \infty}{\sim} -4x^5$

On retient qu'une fonction est équivalente en 0 au terme de plus petit degré.

Une fonction est équivalente à l'infini au terme de plus haut degré.

Attention : il est incorrect en math d'écrire qu'une fonction est équivalente à 0 !!!

II.4 Applications aux fonctions de transfert en physique

On définira dans le cours d'électrocinétique une fonction de transfert qui sera le quotient de fonctions polynômes. On cherchera l'équivalent de la fonction de transfert en 0 et à l'infini. On utilisera donc la propriété que l'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Si $\omega \to 0$, alors $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{1}{1}$

Si $\omega \to \infty$, alors $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{\frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sim \frac{-j}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}$